

密级:\_\_\_\_\_



**中国科学院大学**  
University of Chinese Academy of Sciences

# 博士学位论文

基于非局部作用机理的物理仿真方法研究

---

作者姓名: \_\_\_\_\_ 何小伟 \_\_\_\_\_

指导教师: \_\_\_\_\_ 吴恩华 研究员 \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ 中国科学院软件研究所 \_\_\_\_\_

学位类别: \_\_\_\_\_ 工学博士 \_\_\_\_\_

学科专业: \_\_\_\_\_ 计算机应用技术 \_\_\_\_\_

研究所: \_\_\_\_\_ 中国科学院软件研究所 \_\_\_\_\_

2017年10月

**Research on Physical Simulation Methods Based on Nonlocal**

**Interaction Mechanics**

**By**

**Xiaowei He**

**A Dissertation/Thesis Submitted to**

**The University of Chinese Academy of Sciences**

**In partial fulfillment of the requirement**

**For the degree of**

**Doctor of Computer Application Technology**

**Institute of Software, Chinese Academy of Sciences**

**October, 2017**

## 学位论文独创性声明

本人郑重声明：我所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及所取得的研究成果。尽我所知，除了文中已经标注引用的内容外，本论文中不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中作了明确的说明或致谢。本人知道本声明的法律结果由自己承担。

学位论文作者签名：\_\_\_\_\_日期： 2017.11.25

## 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解中国科学院软件研究所有关保留、使用学位论文的规定，即：中国科学院软件研究所有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；中国科学院软件研究所可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。

（涉密的学位论文在解密后，按此规定执行。）

学生签名：\_\_\_\_\_导师签名：  日期： 2017.11.25

# 基于非局部作用机理的物理仿真方法研究

## 摘要

基于物理的仿真动画技术作为一种重要的建模手段已经成为图形学研究的热点，同时也是难点。相比于传统的关键帧动画，物理仿真可以提供更加逼真的身临其境感和视觉冲击，因而在影视特效、游戏中都已得到广泛应用。然而现有物理仿真技术主要基于连续介质力学，其在描述和建模现实世界中复杂场景时存在诸多的问题和不足。为了拓展物理仿真技术的适用范围和建模能力，本文研究如何基于非局部作用机理进行流体、弹塑性材料以及多介质耦合的统一建模和仿真。归纳起来，本文的内容和创新点主要包括三方面：

(1) 详细探讨了连续介质力学的理论基础及其在建模复杂场景时的局限性，并在非局部作用机理的框架下重新阐述了场、梯度、散度和旋度的定义，揭示了它们背后的直观含义。同时，为了克服连续介质力学中微分方程在建模运动控制方程中局限性，本文详细阐述了态的概念，将连续介质力学中应力张量、应变张量等只适用于描述连续介质的物理量拓展到可以统一描述连续和非连续介质的非局部应力和非局部应变，并通过将微分形式的运动控制方程转换成了积分方程来解决连续介质力学的局限性。

(2) 为了解决长期以来一直困扰传统粒子法的拉伸不稳定性以及边界粒子缺失等问题，本文利用基于非局部作用原理和变分原理将流体的不可压缩性求解问题转换为基于动能最小的优化问题，并通过引入半分析法用于解决边界粒子缺失的问题，从而保证在不增加计算开销的前提下可以提升仿真的计算精度。另外，本文针对自由表面流中表面张力计算不稳定、精度差的问题，提出利用 Helmholtz 自由能来建模表面张力的方法，保证即使在边界采样粒子不足的情况下依然可以得到稳定可靠的表面张力计算结果。最后，为了增强表面细节，本文利用声波的波动方程近似模拟了表面张力波的生成和传播的过程。

(3) 为了保证任意维度的弹性材料在极端形变下的稳定模拟，本文提出一种新的基于积分形式的本构模型建模材料的弹性部分。对于塑性形变，本文通过直接更新材料的初始形状的方式来避免退化情况的发生。此外，为了保证均质流体内部的均匀性，本文提出一种基于位置的矫正方法来保证仿真粒子分布的均匀性。另外，本文根据颗粒流水分饱和度和颗粒密度提出一种动态计算材料系数的方法，从而使得我们的方法可以用统一的方式模拟不同饱和度下的颗粒流。

**关键词：**非局部作用机理、流体仿真、弹塑性材料仿真。

# Research on Physical Simulation Methods Based on Nonlocal Interaction Mechanics

## ABSTRACT

Physical-based animation has become an important modeling tool for computer graphics. Compared to the keyframe-based technique, physical-based techniques can create more realistic and immersive effects, thus has been widely used in the films and video games. However, existing physical-based animation technologies are mainly based on continuum mechanics, which suffers difficulty in describing and modeling complex scenes in the real world. In order to extend the scope and modeling ability of physical simulation technology, this paper studies how to imulate fluid, elastoplastic materials and their coupling based on nonlocal action theory. To sum up, this paper mainly studies three problems:

(1) This paper first discusses the fundamental theory of continuum mechanics and its limitations in modeling complex scenes, and then reformulates the definition of field, gradient, divergence and curl under the nonlocal theory. In order to overcome the inefficiency of differential equations in modeling material behaviors, this paper introduces the concept of state and reformulates the stress tensor, strain tensor into stress state and strain state. Therefore, we can finally model continuous and discontinuous materials uniformly, which overcomes the limitations of continuum mechanics.

(2) Numerical problems such as the tensile instability and the particle deficiency problem has long plagued traditional SPH methods. To solve these two problems, this paper applies a variational framework to convert the pressure Poisson equation of fluid into an optimization problem which minimizes the total kinetic energy. We then propose a semi-analytical method to solve the particle deficiency problem, so as to ensure that the accuracy of simulation result is improved without increasing the computational cost. In addition, this paper proposes a method to model the surface tension by using Helmholtz free energy to ensure that surface tension can be accurately calculated even if the sampling near the boundary is sparse. Therefore, our method can handle a variety of sparsely sampled thin liquid features, including thin sheets, thin jets, and water splashes. Finally, in order to enrich fluid with capillary waves, we generate capillary wave effects by simulating compression wave propagation.

(3) In order to simulate versatile elastoplastic materials uniformly, we study the

development of an elastoplastic model under the nonlocal theory, which uses integrals rather than partial derivatives in its formulation. To model elasticity, we propose a unique constitutive model and an efficient iterative simulator solved in a projective dynamics way. To handle plastic behaviors, we incorporate our simulator with the Drucker-Prager yield criterion and a reference position update scheme, both of which are implemented under the nonlocal theory. Finally, we show how to strengthen the simulator by position-based constraints and spatially varying stiffness models, to achieve incompressibility, particle redistribution, cohesion, and friction effects in viscoelastic and granular flows.

**KEY WORDS:** nonlocal theory, fluid simulation, elastoplastic material.

# 目录

第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究现状.....	3
1.3 研究内容.....	6
1.4 论文组织.....	7
第二章 连续介质力学理论.....	9
2.1 连续介质力学简介.....	9
2.2 局部作用量.....	10
2.3 连续介质力学.....	16
2.4 本章小结.....	25
第三章 非局部作用机理研究.....	27
3.1 非局部作用机理简介.....	27
3.2 非局部作用量.....	28
3.3 非局部作用动力学.....	33
3.4 本章小结.....	39
第四章 非局部作用机理在流体仿真中的应用.....	41
4.1 引言.....	41
4.2 相关研究工作.....	43
4.3 不可压缩流体求解.....	44
4.4 流体表面张力.....	52
4.5 流体表面波.....	57
4.6 本章小结.....	62
第五章 非局部作用机理在弹塑性材料仿真中的应用.....	63
5.1 引言.....	63
5.2 相关研究工作.....	64
5.3 弹性材料建模.....	66
5.4 塑性材料建模.....	72
5.5 均质粘弹性流体建模.....	74
5.6 颗粒流建模.....	76
5.7 多介质耦合建模.....	78
5.8 本章小结.....	80
第六章 物理仿真引擎统一框架的设计与实现.....	81
6.1 总体框架.....	81
6.2 有向距离场.....	83
6.3 形函数.....	85
6.4 邻域表建立.....	86
6.5 表面重构.....	88
6.6 本章小结.....	90
第七章 总结与展望.....	91

7.1 本文总结.....	91
7.2 未来展望.....	92
参考文献.....	94
攻读学位期间发表的学术论文.....	103
致 谢.....	104

## 插图目录

图 1 《奇幻森林》中的剧照 ©Disney .....	1
图 2 梯度的示意图, 箭头表示相应点梯度的方向和大小 .....	12
图 3 向量场 $\mathbf{F}$ 的通量的示意图 .....	12
图 4 向量场 $\mathbf{F}$ 的环量的示意图 .....	14
图 5 环量密度 .....	14
图 6 长、宽、高分别为 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$ 的长方体 .....	17
图 7 弹性形变示意图 .....	17
图 8 应力的示意图 .....	20
图 9 微元的动量平衡原理 .....	20
图 10 柯西应力张量示意图 .....	21
图 11 流场示意图 .....	23
图 12 流体动量守恒示意图 .....	24
图 13 四种典型作用区域 $\Omega_i$ 示意图 .....	32
图 14 非局部形变示意图。(左) 连续性形变; (右) 非连续形变 .....	35
图 15 三种典型的非局部应力 .....	37
图 16 高速相机下的流体形态 .....	41
图 17 粒子分布示意图。(左) 传统 SPH 粒子分布; (右) 基于非局部作用机理的粒子分布 .....	45
图 18 边界粒子分布示意图 .....	47
图 19 四种典型方法在测试拉升 Benchmark 的实验结果(从左到右依次为 SSPH[12]、DVSPH[13]、SASPH[84] 和本文中的方法) .....	50
图 20 拉升 Benchmark 精度比较 .....	50
图 21 旋转 Benchmark 示意图[85] .....	51
图 22 拉升 Benchmark 测试结果比较。前四组表示 $t = 1.7s$ 时刻的结果(从左到右依次为 SSPH[12]、DVSPH[13]、SASPH[84] 和本文中的方法), 最后一组表示表示本文方法在 $t = 5s$ 时刻的结果。上排未对粒子进行校正, 下排则是对粒子进行一定校正之后的实验结果。 .....	51

图 23 三种典型表面结构边界粒子受力情况示意图 .....	53
图 24 表面张力比较, 从左到右依次采用的基于 CSF 的方法、IIF 方法和本文方法 .....	54
图 25 虚拟大气粒子分布示意图 .....	54
图 26 本文方法与[20]的动态效果比较 .....	55
图 27 本文方法与[20]的效率比较 .....	56
图 28 Plateau-Rayleigh 不稳定性效果模拟。 .....	56
图 29 不同表面力组合所展示的效果。(左) 只施加表面张力的效果; (中) 只施加 大气压强力的效果; (右) 同时施加表面张力和大气压强力的效果。 .....	57
图 30 本文方法在产生精细流体细节方面的能力。 .....	57
图 31 表面波模拟流程图 .....	57
图 32 波在 Stanford Bunny 模型的传递。(左) 未进行平滑操作的效果; (右) 进行 平滑操作之后的效果。 .....	59
图 33 表面波叠加前后效果对比 .....	60
图 34 本文仿真结果与真实照片的效果对比 .....	61
图 35 通过直接边界控制实现的多种流体相容情况 .....	61
图 36 水下气泡仿真及气体预冷凝结相变过程模拟 .....	61
图 37 近场动力学局部形变示意图 .....	67
图 38 Stanford bunny 从被压扁到完全恢复的过程.....	69
图 39 弹簧系统模拟 Armadillo 产生的弹性形变效果 .....	69
图 40 Shape Matching 方法模拟 Armadillo 产生的弹性形变效果.....	70
图 41 本文方法模拟 Armadillo 产生的弹性形变效果 .....	70
图 42 本文方法可以模拟不用弯曲程度下的布料 .....	70
图 43 本文方法模拟绳子扭曲的效果。(左) 粒子视图; (右) 网格视图。 .....	71
图 44 不同方法收敛性比较 .....	72
图 45 兔子碰撞过程中产生的塑性形变 .....	74
图 46 本文方法对粘弹性流体的仿真 .....	74
图 47 调解 $\delta$ 对流体形态产生的影响 .....	75
图 48 不同水分饱和度对沙子运动的影响 .....	77
图 49 干沙子的仿真收敛性比较。(左) 不做任何处理时的形态; (右) 采用本文方	

法处理后的效果。 .....	77
图 50 不同摩擦角参数下干沙堆的效果 .....	78
图 51 大规模湿沙堆模拟 .....	78
图 52 不同弹性系数下黏弹性流体的模拟 .....	79
图 53 粘弹性流体与布料的耦合模拟 .....	79
图 54 流体与沙粒间的耦合模拟 .....	79
图 55 裙子相变过程的模拟 .....	80
图 56 系统实现总体框架 .....	81
图 57 IWindow 接口设计与实现.....	81
图 58 IRenderer 接口设计与实现.....	82
图 59 IFile 接口设计与实现.....	82
图 60 ISimulation 接口设计与实现.....	82
图 61 IModule 接口设计与实现.....	83
图 62 IMemroy 接口设计与实现.....	83
图 63 Stanford bunny 离散前与离散后的形态展示.....	84
图 64 有向距离场示意图 .....	85
图 65 形函数示意图 .....	86
图 66 邻接表建立过程示意图 .....	87
图 67 基于能量法距离场计算方法示意图 .....	88
图 68 Marching Cubes 方法示意图.....	89
图 69 表面扰动过程示意图 .....	89







# 第一章 绪论

## 1.1 研究背景

随着硬件技术的快速发展，基于物理的仿真动画技术也逐渐成研究的焦点。相比于传统的关键帧动画，物理仿真可以提供更加逼真的身临其境感和视觉冲击，因而在影视特效、游戏中都已得到广泛应用。如图展示了《奇幻森林》中的剧照，其中的自然场景以及物理特效所展示出来的逼真程度几乎已经达到了真假难辨的程度。但是在这逼真的特效背后，我们先来看一组数据：在整个奇幻森林特效的制作过程，MPC 公司共“800 人参与了《奇幻森林》的制作，前后花费 2 年时间，制作了超过 70 个逼真的生物角色和 1300 多个特效镜头，在制作高峰期，公司每天生成的镜头版本超过 3000 个” [1]。另外，我们再看一下其他几部电影的人力投入：《阿凡达》1855 人；《泰坦尼克号》739 人；《复仇者联盟》1453 人；《变形金刚 3：月黑之时》 [2]。假如我们按照平均 1000 人投入，制作周期为 2 年，人均每年工资 5 万美元计算，那么一部特效密集型的电影的总投就相当于 1 亿美元。这对于一般的电影投资商是完全无法承受的，导致很多电影公司不得不为了降低预算修改剧本或者依然选择采用一些传统的布景方式来完成一些特效，从而使电影无法达到导演预期的效果。

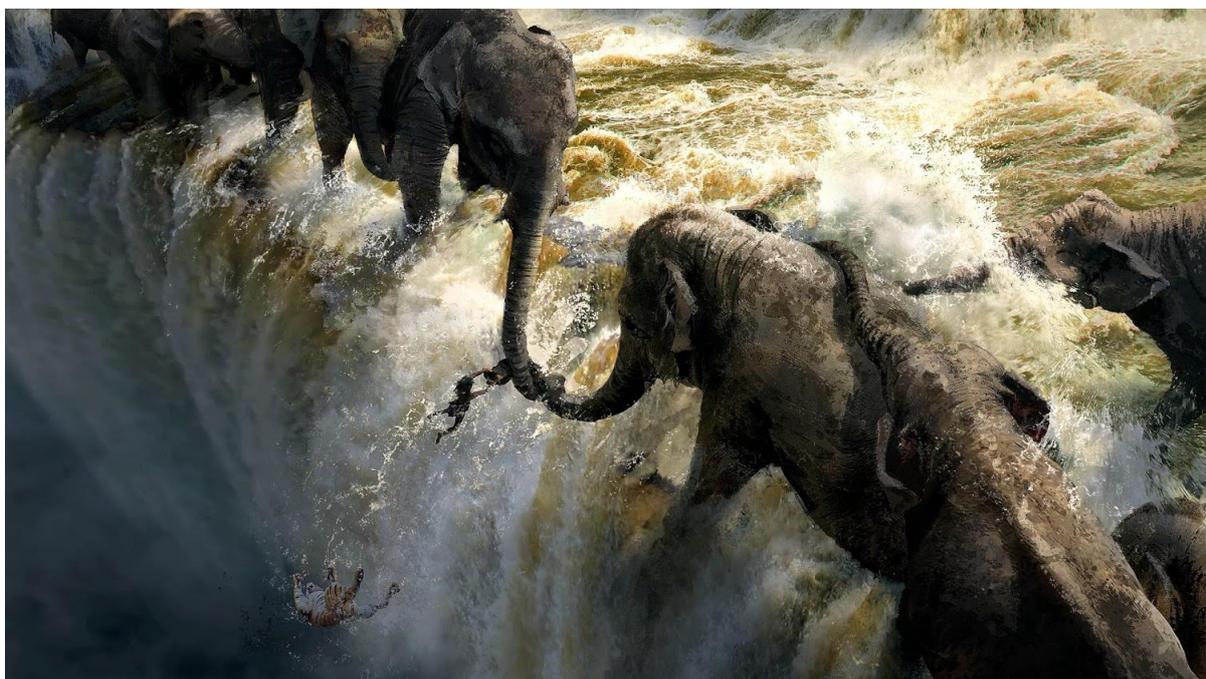


图 1 《奇幻森林》中的剧照 ©Disney

当然，造成电脑特效制作成本高昂的原因是多方面的，而其中很重要的一方面原因

在于目前物理仿真技术依然存在很多局限性。我们知道现有的物理仿真技术尽管在处理单一连续介质地仿真时已经能够模拟出非常逼真的效果，比如针对大规模的水体、爆炸、火焰等效果地模拟。然而，现实生活中我们所接触的场景远比以上场景要复杂，主要是由于同一个场景中通常会包含多种不同的介质。比如对泥石流的模拟，我们需要同时考虑水、沙粒甚至是较大颗粒的石块地模拟以及它们之间的相互作用。此外，要想得到逼真的效果，我们甚至还需要考虑石块因为相互碰撞而引起的碎裂等效果。众所周知，现有物理仿真方法主要基于传统的连续介质力学理论，因而当仿真对象涉及大量非连续地变化过程或者是不同纬度特征的几何结构时，现有方法无法不仅在理论上缺乏适用于对连续介质与非连续介质进行统一描述与计算的模型，在实现上也由于材料几何以及物理属性的多样性导致仿真算法的开发过程困难重重。具体困难主要体现在如下几个方面：

(1) 传统连续介质力学理论存在局限性。我们知道，现有物理仿真技术普遍基于连续介质力学理论来实现，而连续介质力学理论的基本假设是要求材料内部任意点处的形变位移场连续且可微。尽管这一假设在宏观层面具有一定合理性，但是实际场景中通常会涉及不同尺度的材料，当材料的建模尺度超过一定限度时，连续介质力学的假设就会失效从而导致无法有效建模包含非连续性的场景。

(2) 现有物理仿真方法种类繁多，但各自都有其优缺点。比如在模拟形变材料上普遍使用的是有限元法 (Finite Element Method)，而在模拟流体时用的最多的则是光滑粒子动力学法 (Smoothed Particle Hydrodynamics) 和有限体积法 (Finite Volume Method)。尽管这些方法在模拟特定材料时具有其他方法不可比拟的优势，但是在处理其他材料的模拟或者是涉及多种材料的复杂场景时依然具有很多的不足，比如当我们利用 SPH 方法来模拟弹性材料时存在精度低、稳定性差等问题。

(3) 统一物理仿真技术的发展还并不成熟。目前主流的用于统一建模多种材料的系统主要包括 NVIDIA 的 Flex[3] 以及 Autodesk 的 Nucleus[4]。这两者的共同点都是大量采用了基于粒子的方式来实现，但是不足也是显而易见的，比较典型的问题包括精度低、无法准确反应真实物理特性等问题。

(4) 最后，颗粒流作为一种典型的物理介质，一直以来都是图形仿真的难点。主要原因在于颗粒通常形态各异、尺寸相差悬殊，颗粒间相互作用具有突发性和随机性，从而极大增加了颗粒流运动仿真的复杂性，对适用于图形应用的仿真算法提出了更高的要求。另外，颗粒流动根据其剪切受力的不同状况可分为慢速（包含静止状态）、中速及快

速颗粒流。快速颗粒流目前发展相对较成熟，而对于慢速及中速流由于主要承受 Coulomb 摩擦力的作用，无法直接采用快速流的方法进行计算。如何设计统一的计算框架成为整个仿真过程得以顺利完成的保障。

本课题的研究主要从两方面展开：一方面侧重于非局部作用机理的研究，针对连续介质理论在描述不连续问题时的不足，拟采用非局部作用思想对材质进行建模，并利用积分方程来重新建模材质的动力学过程，以便于克服基于微分的连续介质理论在物理仿真统一建模中的不足。另一方面主要基于非局部作用机理重点研究了其在自由表面流、弹塑性材料以及多介质统一建模上的应用。

## 1.2 研究现状

目前图形学中采用的主流物理仿真方法包括有限元法（Finite Element Method, FEM）、网格质点法（Particle in Cell, PIC）、有限体积法（Finite Volume Method, FVM）、格点 Boltzmann 方法（Lattice Boltzmann Method, LBM）以及光滑粒子动力学（Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH）方法等。由于每一种方法通常都可用于模拟多种现象，因而本节将从仿真类型入手探讨图形领域物理仿真的研究现状。

### 流体仿真

目前用于流体模拟的主流方法主要是包括 SPH 方法和欧拉网格法。SPH 方法最初主要是用来模拟三维空间中的星体运动[5, 6]，但随后研究人员就发现流体的运动实际上与星体运动相似，因而逐渐将 SPH 方法拓展到流体仿真中。SPH 核心思想的实际上是将流体区域离散为一堆粒子，并利用核函数建模邻域粒子间的相互作用。随着 Desbrun 和 Gascue[7]首次将 SPH 方法引入图形邻域，经过近二十年的发展，SPH 已经成为了流体仿真中不可或缺的方法。研究人员也从多方面对传统 SPH 方法进行了改进和完善，主要包括不可压缩性求解[8-15]、表面张力计算[16, 17]、多相流仿真[18, 19]和流固耦合[12, 20, 21]。我们知道 SPH 的优点在于实现简单，且可以方便处理任意复杂拓扑变化，但是不足在于计算开销大且精度低，为了解决这些问题，研究人员分别从邻域查找[22]、自适应采样[23-25]、GPU 加速[26, 27]等多方面对 SPH 算法提出了改进。更多关于 SPH 流体方面的内容也可以参考综述文章[28, 29]。当然解决 SPH 不足的另一个途径就是采用欧拉法来进行流体模拟，与 SPH 不同的是欧拉法通常采用背景网格来求解流体的动力学。由

于早期的欧拉法仿真时间步长严格受 CFL 条件的限制, 因而其在图形邻域内的应用一直受限。Stam[30]首次利用 Semi-Lagrangian 的方法解决了这一稳定性问题, 从而使得基于欧拉网格的方法在图形学中被广泛采用。根据流体介质追踪方法的不同, 欧拉法主要包括基于 Level-Set 的方法[31-33]、基于密度的方法[34, 35]、基于粒子的方法[36, 37]以及基于相场的方法[38]。欧拉法的优点主要在于其计算效率相对较高, 且可以很容易对其进行并行加速。当然不足也较明显, 尤其是在多介质耦合的仿真问题上困难重重。其他可用于流体仿真的方法主要包括基于位置的方法[15]、Power Particle 方法[39]以及格点 Boltzmann[40]方法。当然, 某种意义上来说, 我们也可以将基于位置的方法和 Power Particle 方法看成近似的 SPH 方法, 格点 Boltzmann 方法则可以看做是欧拉网格法一种。

### 弹塑性材料仿真

弹塑性材料仿真的主流方法包括有限元方法、基于位置的方法。有限元方法在工程中的发展历史较为悠久, 且已经形成较为完善的理论体系。图形学中关于有限元方法的研究可以追溯到 Terzopolous 等人[41-43]。O'Brien 和 Hodgins[44]随后使用有限元法对弹性材料和脆性断裂进行了模拟。后来他们又通过增加一定的延展性来对延展碎裂进行了模拟[45]。后续的研究人员则主要从稳定性[46]、可控性[47]等方面入手进行了研究。我们知道有限元方法的主要优势在于理论发展成熟、计算精度高, 但是其实现较复杂。为了克服这一问题, Muller 利用约束的方法提出了直接基于位置的弹塑性材料模拟方法[48]。其核心思想是将所有力学过程建模成约束, 并利用迭代方式来逐步收敛得到最终解。这样做的好处是算法实现简单、效率高且具有极好的稳定性, 因而可以统一布料[49, 50]、头发[51]、碰撞检测[52]等多种材质。当然, 基于位置的方法的不足在于其精度相比于有限元方法要低, 此外算法的后期收敛性比较慢。针对这些问题, Bouaziz 等人[53]提出了一种新的投影方法, 并指出基于位置的方法实际上是基于投影方法 (Projective Dynamics) 的一种特例, 因而可以将基于位置的方法也转换为最优化问题进行求解。但是基于投影方法的缺陷在于其需要求解全局的线性方程组, 因而无法有效的在 GPU 上进行加速。为了解决这一问题, 研究人员考虑了如果利用迭代的方式在 GPU 上加速算法的收敛过程[54]。当然, 研究人员也从其他方法入手对弹塑性材料进行了仿真, 并取得了一定的效果, 主要包括质点弹簧方法[55]、物质点法[55]、SPH 方法[56]等。

### 颗粒流仿真

目前主流的研究颗粒流的方法可以分为几大类。第一类是采用分子动力学(Molecular Dynamics)的方法, 该类方法针对不同材料的力学属性差异, 通过直接计算接触颗粒间的相互作用力来驱动颗粒的运动。如 Luciani[57]等直接采用带阻尼的弹簧来建模颗粒之间的作用力。Bell 等[58]则是采用更为精确的分子动力学中的球体接触模型来计算颗粒间的排斥力以及摩擦力, 从而可以模拟更为精确的颗粒流现象。然而基于直接力作用的方法在处理许多问题时候都显得捉襟见肘, 其主要面临如下三方面的困难[59]: 首先, 颗粒间的接触模型必须是已知的。这对于规则的球体来说还相对比较容易, 如现有的 Hertzian 接触力模型已经可以比较好的描述球体相互之间的作用力。然而由于实际碎裂过程中所产生的碎片往往形态各异, 尺寸也相差很大, 如何建模不规则的、不同尺寸的颗粒间的相互作用目前仍然是个未知数。其次, 该类方法无法有效模拟静力学问题。在静力学问题中, 颗粒间的接触力并无法通过独立的计算颗粒对间的接触来求出满足静力学平衡所需要的接触力, 而需要将整个系统作为一个整体来求解满足摩擦力约束条件的全局静态平衡。此外, 刚性颗粒之间的碰撞要求时间步长足够小, 以便真实模拟碰撞的全过程, 这无疑极大的增加了总的仿真开销。针对分子动力学方法的如上不足, 接触动力学方法(Contact Dynamics)通过施加颗粒间的约束来模拟颗粒流, 因而非常适合模拟刚性、弹性颗粒之间的接触问题以及静力学平衡问题[60-62]。然而, 由于接触动力学在模拟颗粒相互作用时忽略了材质属性, 因而在模拟动态问题时稍显吃力, 甚至有时候并不能得到符合真实物理的仿真结果。此外, 接触动力学在求解过程中涉及带约束的优化问题, 因而以目前的计算能力很难对包含大量颗粒的场景进行求解。总的来说, 我们可以认为分子动力学与接触动力学在仿真的适用范围上是互补的。当一个场景中既包含静态部分同时又包含动态部分的时候(如雪崩、泥石流), 就很难用单一的方法来得到高效、精确的仿真结果。近年来, 为了提高颗粒材料仿真的效率, 一些研究者从连续介质力学理论入手对颗粒流进行建模, 通过将颗粒对之间的直接接触转换成连续介质理论中的运动控制方程来得到近似的仿真结果。如 Zhu 和 Bridson[36]将沙粒的运动简化成一种带库伦摩擦力模型的牛顿流体; Narain 等[63]用类似的方法模拟了沙粒与刚体的双向耦合; Stomakhin[64]利用材质点法对雪进行模拟, 随后研究人员又通过将 Drucker-prager 延展模型引入物质点方法中对颗粒流进行了模拟[65]。尽管从工程的角度来, 这类方法的仿真精度尚显不足。但是对于图形学来说, 一定程度的精度损失在不影响视觉效果的前提下依然是可以被接受的。

### 1.3 研究内容

本文工作主要研究了非局部作用机理及其与传统连续介质力学理论之间的联系，并重点研究了如何基于非局部作用机理对在流体、弹塑性材料进行统一的建模与仿真。具体的研究内容及贡献点如下：

(1) 本文首先回顾了连续介质力学的基本理论，并探讨了场、梯度、散度、旋度、张量、应力、应变等基本概念以及从微分形式分析了他们所代表的物理含义，然后基于非局部作用定义了它们的积分形式，为基于非局部作用机理的物理仿真统一模型奠定了理论基础。

(2) 由于拉伸不稳定性及缺失的问题一直制约着粒子法在求解流体动力学问题上的稳定性和精度，本文提出一种基于非局部变分原理的不可压缩自由表面流的仿真方法，其基于非局部作用机理和变分原理将传统基于微分形式的流体运动控制方程成功转化为了基于动能最小的最优化问题，同时通过引入半分析 (semi-analytic) 边界处理方法，有效提升了不可压缩流体自由表面边界条件的处理精度，同时也削弱了拉伸不稳定性对仿真稳定性的影响。

(3) 针对边界粒子缺失问题对表面张力计算精度的影响，本文进一步提出基于 Helmholtz 自由能的表面张力计算模型，该模型可以保证在边界处粒子的不足的情况下依然可以模拟出正确的表面张力效果。同时为了建模精细的流体细节，我们还基于压力波提出了一种近似的表面张力波的计算方法，该方法可以保证在不提取流体表面的前提下进行计算，从而避免了提取流体表面的过程，提高了计算效率。

(5) 我们已知传统连续介质力学在模拟弹塑性材料时的一大难题在于其无法统一建模连续和非连续问题，而现实世界中这样的现象却非常普遍，比如一块钢铁从发生小形变到延展进而碎裂的过程需要仿真算法能够同时处理连续和非连续的形变。针对这一难点，我们基于非局部作用机理提出一种基于积分形式的弹性密度模型，该模型避免了连续介质力学理论中的连续性假设，从而适用于统一描述连续和非连续的材料形变特性。此外，该模型还可以统一建模薄壳和绳索等低维度特征材料。

(6) 为了保证塑性模型也适用于建模任意维度的材料，我们摒弃了传统基于张量积分形式的塑性形变模型，并提出基于非局部应变的塑性模型。其核心思想是通过直接修改初始形状的位置来反应材料的塑性形变，从而保证即使出现退化的情况也依然能正确处理材料的塑性形变。

(7) 最后, 为了统一模拟均质粘弹性流体以及颗粒流, 我们对弹塑性模型进行了一定的拓展。对于均质流体, 我们通过采用基于位置调整的方法来保证了粒子分布的均匀性; 同时对于沙粒模拟, 我们根据当前密度以及水分的饱和度对材料系数进行动态调整, 从而实现了统一框架下对干湿沙粒的模拟。

## 1.4 论文组织

本文一共分为七章:

第一章介绍了本文的研究背景、意义、国内外研究现状、主要内容以及取得的主要研究成果。

第二章主要介绍了传统介质力学理论的基础, 并从微观角度分析了一些基本物理量背后所蕴含的直观物理含义, 为第三章对其概念的推广做铺垫。

第三章简述了传统连续介质力学的不足, 并从非局部作用机理入手对传统连续介质力学进行了拓展, 将通量、散度、梯度、旋度等基于微分的概念拓展到非局部作用量中基于积分的形式, 同时引入态的概念并建立起非局部形式的应力、应变以及相应的本构关系。

第四章主要研究如何将非局部作用机理应用到流体仿真中, 并重点讨论了如何基于非局部能量框架求解流体的不可压缩性, 同时通过引入 Helmholtz 自由能来精确的建模表面张力效果。此外, 还提出一种不用显式构建流体表面就可能模拟表面张力波的方法。

第五章主要研究如何将非局部作用机理应用到弹塑性材料的模拟。本章首先提出了一种新的积分形式的能量模型, 然后利用 Projective Dynamics 方法隐式的对控制方程进行求解, 保证了仿真的效率和稳定; 然后提出一种基于非局部作用的塑性形变模拟方法, 用于建模塑性材料的延展性; 最后根据均质流体和颗粒流的特性将弹塑性仿真方法进行了增强, 从而实现了对于干、湿沙粒以及诸如蜂蜜的粘弹性流体的模拟。

第六章主要讨论了如何基于非局部作用机理来设计并实现统一的物理仿真框架, 并重点讨论了几个功能模块的实现细节。

第七章对全文做了总结, 并探讨了未来研究的计划。



## 第二章 连续介质力学理论

### 2.1 连续介质力学简介

科技的发展已经让我们认识到世界上任何物体实际上都是由一些离散的物质点以及他们之间的相互作用力构成。在某些物理分支，比如统计力学和原子物理学，尽管我们可以直接对原子或者分子之间的相互作用进行研究，并通过微观的相互作用来进一步研究宏观的物理现象，比如温度实际上是由于微观粒子动能的一种宏观表现。这些观点对我们认识这个世界的本质起到了重要作用。但是由于原子、分子颗粒的尺度非常小，如果任何现象都直接从为微观层面进行研究往往会得不偿失，而解决这一问题有效手段就是连续介质力学的引入。

与微观尺度方法不同的是，连续介质力学研究的对象尺度要远大于原子和分子的尺度，比如其对密度的定义实际上是一个宏观尺度下对某区域内所含粒子的一种近似平均。这一近似实际上就是连续介质力学的最基本假设，即“连续介质假设”：它认为真实的介质由足够小的粒子构成并充满整个空间，且物质的宏观性质依然受牛顿力学的支配。该假设实际上忽略了物质微观结构的差异性，而统一用宏观的物理量（如质量，数度，压力等）描述介质的特性。在建立起这些等效物理量之后，连续介质力学又通过采用一些函数关系来建立物理量直接的联系，从而便于我们研究介质的物理属性以及运动规律。也就是说连续介质力学的理论基石主要由两部分组成，即基本运动定律和本构关系。目前物理仿真中所采用的基本定律主要包括：（1）质量守恒定律；（2）动量守恒定律；（3）能量守恒定律。而本构关系则是用于描述介质的应力和应变之间的关系。根据连续介质力学的假设，需要我们从宏观角度来理解本构关系。也就是说尽管各种材料或者结构在各种受力阶段的性能可有许多不同的具体反应，但是若宏观尺度上表现出来的应力应变曲线是一样的，则我们依然认为这两种材料的力学行为是一致的。

从逻辑上看，尽管我们可以将连续介质力学看成是经典质点力学延伸，即可以把物体看作连续的质点系，同时我们也必须认识到连续介质力学与经典力学的本质差异在于其连续性假设。也就是说物体单元尺度可以无穷小，这显然与实际的情况并不符。因而在物理仿真的过程中我们需要根据实际情况判断所研究的物理现象是否适合利用连续介质力学理论来研究其运动特性。

## 2.2 局部作用量

本节主要介绍连续介质力学中的一些基本量的定义及其直观的含义，主要包括场、梯度、旋度、散度等。

### 2.2.1 场

在连续介质力学中，通常要考察某个物理量在空间中的分布和变换规律，典型的如质量分布、密度分布、速度分布等，而衡量该物理量随着空间及时间变化的函数我们称之为**场 (Field)**。如果物理量是标量，那么空间每一点  $\mathbf{x}$  都对应着该物理量的一个确定数值，则称此空间为**标量场 (Scalar Field)**，本文一般用未加粗的斜体字母表示，如  $f(\mathbf{x})$ ， $g(\mathbf{x})$ 。当然在不引起歧义的前提下本文会省略括号中的  $\mathbf{x}$ 。典型的标量场包括质量场  $\rho$ 、压强场  $p$  等。如果物理量是矢量，那么空间每一点都有其对应的大小和方向，则称此空间为**矢量场 (Vector Field)**，如速度场  $\mathbf{v}$ 、压力场  $\mathbf{F}$  等。

此外根据场所对应物理量是否随时间的变化而变化又可以进一步将场划分为**稳定场**和**不稳定场**。由于连续介质力学主要考虑的就是介质在外力作用下所引起的变化，因而主要涉及的就是不稳定场。此外，顾名思义，连续介质力学对场的连续性也有一定要求，通常我们要求物理场具有至少一阶连续性，即场具有一阶可导且连续的性质。

### 2.2.2 方向导数与梯度

#### 方向导数

虽然场的定义给定了物理量在空间中的分布情况，然而却无法提供该物理量在某个方向上的变化情况。为了衡量这一变化量，需要定义物理场的方向导数。假定某一标量场为  $f(\mathbf{x})$ ，则其在某个方向  $\mathbf{n}$  上的方向导数定义如下：

$$\text{定义: } \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) - f(\mathbf{x})}{\varepsilon}$$

而在直角坐标系中，我们通常可以直接通过以下定理来计算方向导数：

**定理：**假定  $\cos \alpha$ ， $\cos \beta$ ， $\cos \gamma$  分别为单位方向向量  $\mathbf{n}$  所对应的各个分量，且  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}$  点处的导数存在，则  $f(\mathbf{x})$  沿  $\mathbf{n}$  方向上的方向导数可以通过如下公式计算

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma, \quad (1)$$

其中  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ， $\frac{\partial f}{\partial y}$ ， $\frac{\partial f}{\partial z}$  分别为  $f(\mathbf{x})$  沿主轴方向的偏导数[66]。

从方向导数的定义中我们可以看出，方向导数其实就是衡量物理量在某个点沿特定方向的变化率，因此属于局部作用量。

### 梯度

尽管方向导数的定义给出了物理量在无穷多方向上的变化率，然而在实际仿真过程中我们通常只关注物理量变化率最大的方向，从方向导数的定义我们可以看出，当且仅当单位向量  $\mathbf{n}$  与  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$  的方向相一致时，物理量的变化率才能达到最大值。基于此，我们可以定义物理场的梯度如下

**定义：**若针对场  $f(\mathbf{x})$  在一点  $\mathbf{x}$  处存在这样一个方向导数，其方向为  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}$  处变化率最大的方向，模正好等于最大变化率的数值，则称该方向导数为  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}$  处的**梯度**，记作  $\nabla f(\mathbf{x})$ ，即

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{i}$ ， $\mathbf{j}$ ， $\mathbf{k}$  分别为三个主轴方向所对应的单位向量。

根据梯度的定义，我们可以很容易得出梯度的一个重要性质，即场中每一点处的梯度都与过该点的等值面相垂直。如下图 2 展示了两个典型的场及其对应的梯度：

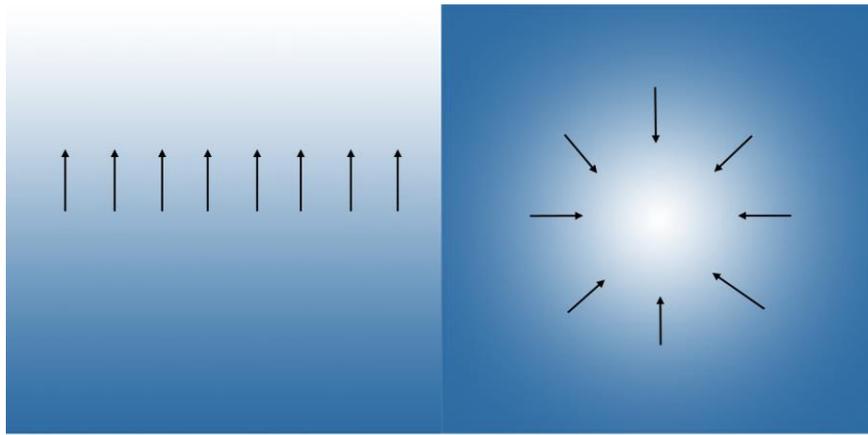


图 2 梯度的示意图，箭头表示相应点梯度的方向和大小

### 2.2.3 通量与散度

#### 通量

在连续介质力学中，通量的定义通常以单位时间内流经某单位面积的某属性量来衡量，是表示某属性量输送强度的物理量。如下图所示，假设某向量场为  $\mathbf{F}$ ，微元  $dS$  对应的单位法向量为  $\mathbf{n}$ ，则向量场通过微元的通量  $Q = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ 。其数值上等价于  $\mathbf{F}$  在单位法向量上的投影。

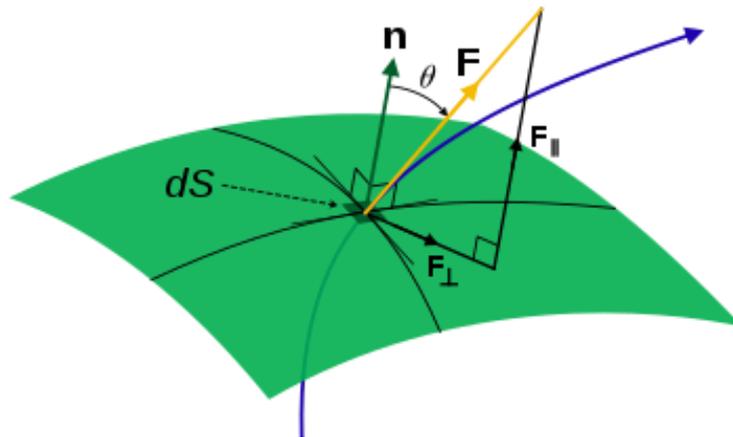


图 3 向量场  $\mathbf{F}$  的通量的示意图

对于任意曲面，向量场相对于该曲面的通量可以表示为如下的积分形式：

**定义：** 设有矢量场  $\mathbf{F}$ ，其沿有向曲面  $S$  某一侧的曲面积分

$$Q = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3)$$

叫做矢量场  $\mathbf{F}$  沿一侧穿过曲面  $S$  的**通量**。

我们注意到连续介质力学中通量的产生的前提是必须有接触，即只能从紧密相邻的一侧区域通过穿越曲面 $S$ 进入到另一侧区域。这一点构成了与非局部作用机理的本质区别，也就是说非局部作用力理论认为相互作用也可以发生在相隔一定距离的两个区域之间，如星体的相互作用通过万有引力来实现，但星体之间却并不存在直接的接触。

### 散度

基于通量的定义，我们来进一步探讨散度的直观含义。假定我们已知某向量场 $\mathbf{F}$ ，任意一点的**散度**可以直接通过如下公式计算

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (4)$$

该定义成立的一个前提是向量场 $\mathbf{F}$ 连续可微，那对于不满足上述条件的向量场，我们如何定义向量场的散度？这就需要借助通量的概念来探讨散度的广义含义。根据散度定理，矢量场的散度在特定积分域上的体积分等于矢量场在限定该体积的闭合曲面 $S$ 上的面积分。因此给定特定区域 $\Omega$ 的散度可以表示为

$$Q = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega = \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

此时通量 $Q$ 描述的是区域 $\Omega$ 与外部区域的交互的作用量，该定义并不依赖于 $\mathbf{F}$ 是否具有连续性，同时积分的形式也方便我们在非局部作用机理中对散度的含义进行推广。

### 2.2.4 环量与旋度

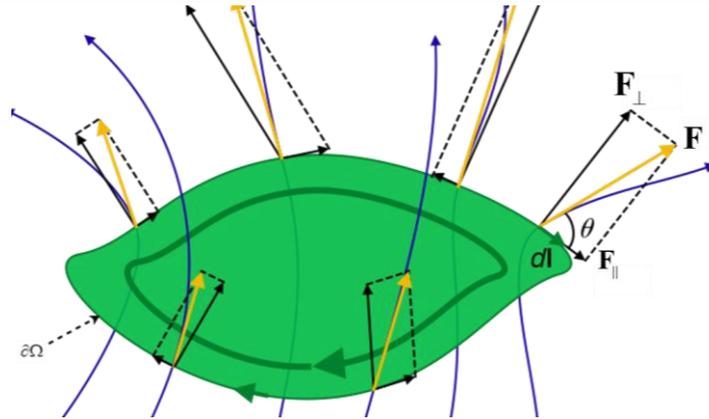
#### 环量

同理，我们也希望通过环量与旋度之间的关系来考察旋度的直观物理含义。

**定义：**假设在矢量场 $\mathbf{F}$ 中任取一条封闭曲线，则沿该封闭曲线的有向积分

$$\Gamma = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (6)$$

称为该封闭曲线的**环量**。与力做功的计算方法一样，环量的符号不仅决定于矢量场的方向，而且与封闭曲线的绕行方向有关，通常我们规定逆时针积分时为正，即封闭曲线所包围的区域总在行进方向的左侧。

图 4 向量场  $\mathbf{F}$  的环量的示意图

### 旋度

假设封闭曲线(曲面)所包含的内部区域定义的矢量场  $\mathbf{F}$  连续且可微, 我们取经过  $\mathbf{x}$ , 单位法向量为  $\mathbf{n}$  的微小曲面, 同时取该曲面的面积为  $\Delta S$ , 边界沿右手螺旋法则方向为正, 示意图见图 5。则根据三维空间中的斯托克定理 (Stokes theorem)

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

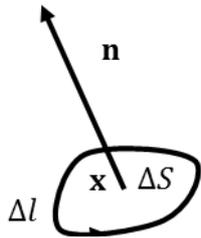


图 5 环量密度

我们可以得到  $\mathbf{x}$  点处的环量面密度为

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}) &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta S} \\ &= \nabla \times \mathbf{F} \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \end{aligned} \quad (8)$$

从环量面密度的定义中我们可以看出, 环量面密度的大小取决于微小曲面的法线方向, 只有当  $\mathbf{n}$  与  $\nabla \times \mathbf{F}$  的方向一致时, 环量面密度才能达到最大值。回顾梯度的定义, 梯度的方向实际是上方向导数取极大值所对应的方向。类似的, 我们可以定义旋度的方向为环量面密度达到极大值的方向。

**定义:** 若矢量场  $\mathbf{F}$  在一点  $\mathbf{x}$  处存在这样一个矢量  $\boldsymbol{\omega}$ , 矢量场  $\mathbf{F}$  在点  $\mathbf{x}$  处沿其方向的环量密度为最大, 且数值为  $|\boldsymbol{\omega}|$ , 则称  $\boldsymbol{\omega}$  为矢量场  $\mathbf{F}$  在点  $\mathbf{x}$  处的旋度, 即

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (9)$$

### 2.2.5 常见等价关系

根据之前局部作用量的定义以及微积分的基本理论，我们可以建立不同局部作用量之间的联系，本节整理了一些常见的等价关系，便于在探讨非局部作用机理时建立相应的等价关系。其中  $u$ 、 $v$  为标量场， $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$  为矢量场， $\nabla$  表示表示梯度，其伴随算子为  $(\nabla)^* = -\nabla$ ， $\nabla \cdot$  表示散度，其伴随算子为  $(\nabla \cdot)^* = -\nabla$ ， $\nabla \times$  表示旋度，其伴随算子为  $(\nabla \times)^* = (\nabla \times)$ ， $\Omega$  为积分域， $\partial\Omega$  为积分域边界， $\mathbf{n}$  为边界法向量。

$$(1) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0,$$

$$(2) \quad \nabla \times (\nabla u) = 0,$$

$$(3) \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}),$$

$$(4) \quad -\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

$$(5) \quad \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

$$(6) \quad \int_{\Omega} \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{n} dS,$$

$$(7) \quad \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS,$$

$$(8) \quad \text{积分定理: } \int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} uv \cdot \mathbf{n} dS,$$

$$(9) \quad \text{第一格林定理: } \int_{\Omega} u \nabla \cdot (\nabla v) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v \nabla \cdot (\nabla u) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \mathbf{n} \cdot \nabla v dS,$$

$$(10) \quad \text{第二格林定理: } \int_{\Omega} u \nabla \cdot (\nabla v) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} v \nabla \cdot (\nabla u) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \mathbf{n} \cdot \nabla u dS - \int_{\partial\Omega} v \mathbf{n} \cdot \nabla u dS,$$

在不引起歧义的前提下，我们通常也直接用拉普拉斯算子  $\Delta$  来替代  $\nabla \cdot \nabla$ ，即  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ ，从而使得表达形式更简洁。以上关系式构成了连续介质力学分析的数学基础，我们接下来将进一步探讨连续介质力学的原理及基本形式。

## 2.3 连续介质力学

### 2.3.1 张量

张量的概念最初是由 Tullio Levi-Civita 和 Gregorio Ricci-Curbastro 在 1900 年提出的，其目的是为了研究某些具有坐标变换不变性的几何性质和物理规律。随后，张量逐渐发展成为连续介质力学理论中最重要的概念。对于一个  $N$  阶张量，其形式通常可以表示为：

$$\mathbf{T} = T_{i_1 \dots i_N} \mathbf{e}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^N \quad (10)$$

其中  $\mathbf{e}$  表示基矢量。此外，张量必须满足以下几个条件

$$(1) \quad \mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T}(\mathbf{a}) + \mathbf{T}(\mathbf{b})$$

$$(2) \quad \mathbf{T}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{a})$$

也就是说，并不是具备公式 10 形式的量就一定是张量，其还必须满足线性变换法则。比如有这么一个矩阵  $\mathbf{M}$ ，它可以把任意向量转换为一个固定向量，即  $\mathbf{M}(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$ ，其中  $\mathbf{c}$  为常矢量，则我们可以验证该矩阵并不满足条件 (1) 中条件，因此  $\mathbf{M}$  也不是二阶张量。

从定义我们也可以看出，标量实际上就是零阶张量，矢量则是一阶张量。由于物理仿真主要在三维空间  $\mathbf{R}^3$  中进行，这里我们将重点考察二阶张量的几个不变量。假设  $\mathbf{T}$  为二阶张量，根据定义我们可以将它进一步写成如下的分量形式

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

通过对  $\mathbf{T}$  的特征方程  $|\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}| = 0$  进行求解，我们可以得到如下三个关系式：

$$(1) \quad I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{tr}(\mathbf{T})$$

$$(2) \quad I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(\text{tr}(\mathbf{T}))^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)]$$

$$(3) \quad I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det[\mathbf{T}]$$

公式中  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  分别被称之为  $\mathbf{T}$  的第一、第二和第三**主轴不变量**，也就是说他们的值不随坐标轴的旋转而改变。此外，当我们用  $\mathbf{T}$  的三个特征根来表示主轴不变量时，我们可以得到如下更加简洁的形式：

$$(1) I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$(2) I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

$$(3) I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

假设我们沿着特征向量构建一个如图所示的长、宽、高分别为  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  的长方体，我们可以看出  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  实际上衡量的是长方体三个边长的和、三个面的面积之和以及长方体的体积。

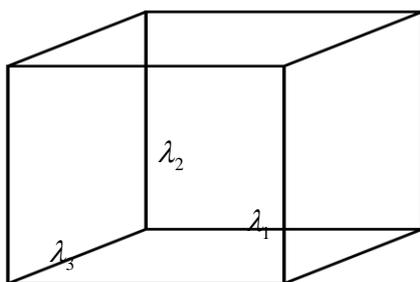
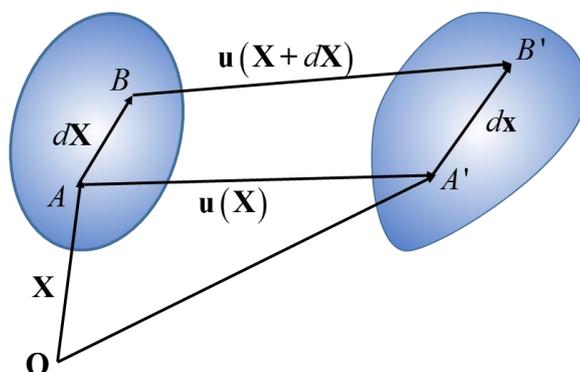


图 6 长、宽、高分别为  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  的长方体

关于张量更多方面的内容，可以参考张量分析[66]中内容。

### 2.3.1 应变

#### 形变梯度



我们知道，任何物体在受到外力作用下会产生一定的变形，变形的程度称之为**应变**。

图 7 弹性形变示意图

为了方便在连续空间中衡量物体的应变，我们将利用张量来描述空间中每一点的应变情况。我们假定某形变体在初始形状如图 7 左边所示，在外力的作用下来，该物体产生形变并形成了图 7 右边的状态。那物体点 A 和点 B 的最终坐标分别变成了

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$$

如果物体的形变连续性且可微，对于小形变，我们可以通过两式相减得到如下的关系式

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}$$

其中 2 阶张量  $\nabla \mathbf{u}$  为**位移梯度**，主要用于刻画形变的局部变化率

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X} & \frac{\partial u_1}{\partial Y} & \frac{\partial u_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X} & \frac{\partial u_2}{\partial Y} & \frac{\partial u_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X} & \frac{\partial u_3}{\partial Y} & \frac{\partial u_3}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

这里需要注意的是位移梯度中偏导数的计算是相对于初始坐标进行的，而实际仿真中当前所处的时刻的坐标系与初始坐标系不一致。当坐标系不一致时，需要我们根据坐标系之间的关系对张量进行变换，从而保证所有物理量的计算在统一的坐标系下完成。

另外，当我们直接将当前位置坐标  $\mathbf{x}$  表示成起始坐标  $\mathbf{X}$  的函数时，即  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ，我们也可以根据公式 12 直接得到  $\mathbf{X}$  处的**形变梯度 F**

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{x} \quad (13)$$

### 小应变张量

下面我们利用微元来考察形变的程度，假设  $d\mathbf{x}$  和  $d\mathbf{X}$  的长度分别为  $ds$  和  $dS$ ，则

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 &= d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot \left( \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u} \right) d\mathbf{X}_2 \end{aligned}$$

对于小形变，我们可以忽略其中的高阶项  $(\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}$ ，从而可以定义**小应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$** 为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (14)$$

如果取  $d\mathbf{x}_1 = d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{x}$ ， $d\mathbf{X}_1 = d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{X}$ ，通过变换我们可以得到

$$\frac{ds - dS}{dS} \approx \frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} \quad (15)$$

当  $\mathbf{n}$  正好与坐标系的主轴方向一致时，我们可以看出小应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  对应对角线上的元素衡量的正好是沿相应方向的伸长量，也就是说  $\boldsymbol{\varepsilon}$  对角线元素正好对应的是各个主方向的伸长量。

同理，我们也可以验证当  $d\mathbf{X}_1$ 、 $d\mathbf{X}_2$  分别取沿主轴方向且互相垂直的分量  $\mathbf{e}_i$ 、 $\mathbf{e}_j$  ( $i \neq j$ ) 时， $2\varepsilon_{ij}$  表示  $d\mathbf{X}_1$  和  $d\mathbf{X}_2$  夹角度数的减少量。

### 格林应变

尽管小应变张量几何含义比较直观，然而不足在于他无法用于描述大形变，也无法正确处理旋转的情况，因而需要引入格林应变张量，其实形式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (16)$$

类似的，我们也可以得出如下关系式

$$\frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (17)$$

然而对于大形变，我们并不能简单的将等式左边简化为伸长量的比值。

## 2.3.2 应力

### 牵引力

如图 8 所示，假设我们在形变体内部区域任取经过点  $P$  且法线方向为  $\mathbf{n}$  的微小曲面，当曲面面积趋近于 0 时，我们可以得到点  $\mathbf{x}$  处沿单位向量  $\mathbf{n}$  的应力为

$$\mathbf{t}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (18)$$

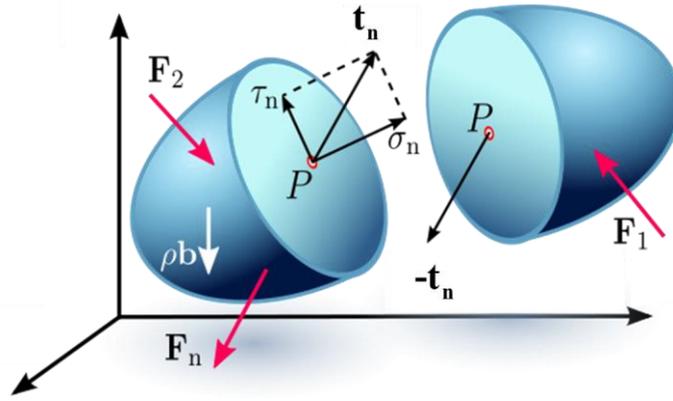


图 8 应力的示意图

如果进一步将  $\mathbf{F}$  分解为平行  $\mathbf{n}$  的分量  $\mathbf{F}_n$  和垂直于  $\mathbf{n}$  的分量  $\mathbf{F}_s$ ，我们可以分别得到法向应力  $\sigma_n$  和切向应力  $\tau_n$

$$\sigma_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}_n}{dS} \quad (19)$$

$$\tau_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}_s}{dS} \quad (20)$$

现在问题是，对于特定点的任意法线方向，我们如何快速计算该点处的应力。回答这个问题需要借助柯西应力定理。

### 柯西应力定理

我们截取如图 9 的四面体，其中四面体体积为  $dV$ ，斜面的面积为  $dA$ ，三个与坐标面平行的面的面积为  $dA_i$  ( $i=1,2,3$ )，根据力的平衡原理我们可以得到[116]

$$\mathbf{t}_{e_1} dA_1 + \mathbf{t}_{e_2} dA_2 + \mathbf{t}_{e_3} dA_3 + \mathbf{t}_n dA = \rho \mathbf{a} dV \quad (21)$$

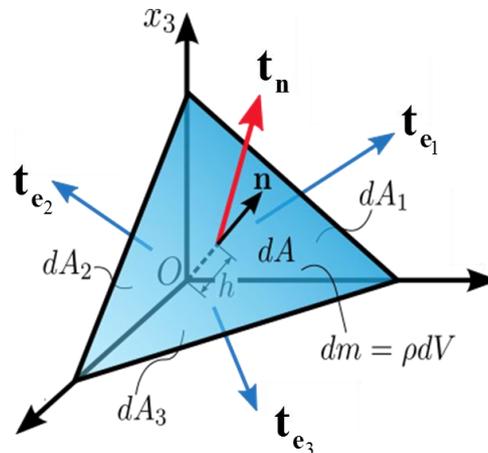


图 9 微元的动量平衡原理

当四面体的体积趋近于 0 时，我们可以得到如下关系式

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}, \quad \mathbf{T} = [\mathbf{t}_{e_1} \quad \mathbf{t}_{e_2} \quad \mathbf{t}_{e_3}] \quad (22)$$

其中  $\mathbf{T}$  我们称之为柯西应力。

### 应力张量

根据柯西应力定理，形变体内任意一点的受力情况都可以用一个二阶应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  来描述：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

应力张量每一项的直观物理含义可以通过截取如图所示的微元立方体来表示

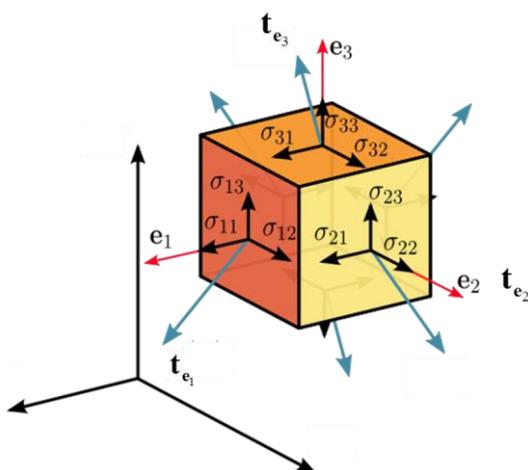


图 10 柯西应力张量示意图

从图 10 可以看出，应力张量对角线元素衡量的是三个主轴方向的法向应力，而其他元素衡量的则是切向应力。此外根据角动量守恒原理，我们可以进一步得到如下关系式：

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

也就是说应力张量是对称矩阵。

### 线性本构关系

本构关系是用来建立应力张量与应变张量之间关系的桥梁。对于小形变，我们通常

用线性模型来建模，其一般形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (24)$$

其中  $\mathbf{C}$  为本构系数，是 4 阶张量，共含有 81 个元素。然而在实际情况中，我们可以根据材料的属性对本构关系进行简化。对于各向同性的材料而言，通过考虑材料的对称性，我们可以将本构关系简化为

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \right) \quad (25)$$

其中  $\lambda$ 、 $\mu$  为 Lamé 常量，分别控制材料法向和切向应力的强度。

### 非线性本构关系

尽管线性本构关系的材料实现相对简单，然而现实世界中大部分材料都是非线性的。对于非线性材料，我们并不能简单的用如上的线性方程来描述应力和应变的关系。我们一般用函数来表示应力应变关系，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (26)$$

相应的，本构系数可以通过对  $\boldsymbol{\sigma}$  求偏导获得，即  $\mathbf{C}_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ ，这里下标为爱因斯坦指标。

此外，我们需要注意非线性模型的本构系数并非常量，它会随着物体的形变而不断发生变化。所以实际仿真中，我们通常也会根据材料储存的内能来计算应力张量。假设某点处材料的内能密度为  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ，则我们可以通过以下公式计算该点处的应力张量

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (27)$$

### 2.3.3 运动控制方程

物理世界中物质的运动一般需要遵循质量守恒原理、动量守恒原理以及能量守恒原理。下面我们考察如何在欧拉坐标系下建立起物质的运动控制方程。

#### 质量守恒定理

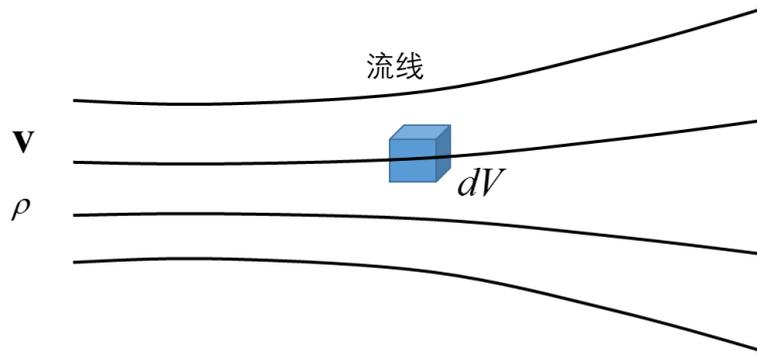


图 11 流场示意图

如图 11，我们选定在三维空间中的一个封闭区域，设它在  $t$  时刻所占据的空间区域记为  $\Omega$ ，边界记为  $\partial\Omega$ 。 $\rho(\mathbf{x}, t)$  表示当前时刻介质的密度， $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  表示速度，则介质从  $t$  时刻运动到  $t + \delta t$  时刻时，封闭区域内介质质量的变化量为

$$\delta m_1 = \delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV \quad (28)$$

根据质量守恒定律，我们知道质量既不会凭空产生也不会凭空消失，因而变化的质量只能通过封闭区域的边界流出（流入）。根据通量的定义，流经边界总量可以表示为

$$\delta m_2 = \delta t \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (29)$$

根据  $\delta m_1 + \delta m_2 = 0$ ，我们可以得到如下关系式

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (30)$$

依据散度定理，我们可以将以上公式转换为

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (31)$$

考虑到  $\Omega$  的任意性，我们可以得到如下连续性方程，即任意点密度的变化量数值上等于  $\rho \mathbf{v}$  的散度。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (32)$$

## 动量守恒定理

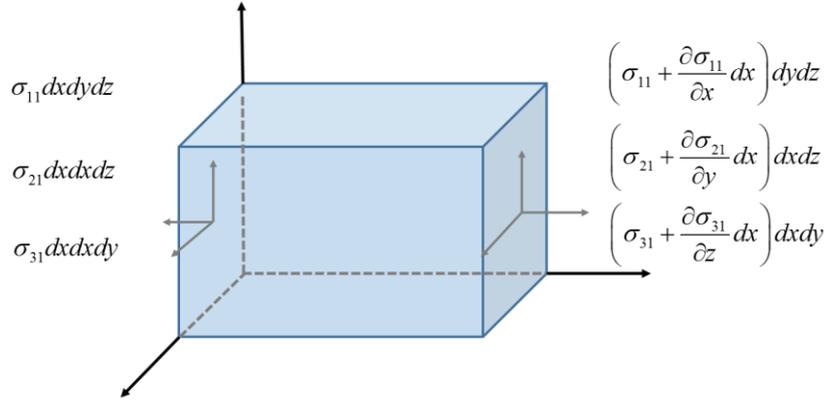


图 12 流体动量守恒示意图

考虑如图 12 所示的微元及其受力情况，我们首先考虑  $x$  方向的受力情况。假设  $x$  方向收到的外力为  $g_x$ ，则我们可以建立如下的关系式

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{dv_x}{dt} dV &= \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{11} dydz \\
 &\quad + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} dx \right) dx dz - \sigma_{21} dx dz \\
 &\quad + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dx \right) dx dy - \sigma_{31} dx dy \\
 &\quad + \rho g_x dV \\
 &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dV + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} dV + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dV + \rho g_x dV
 \end{aligned} \tag{33}$$

当  $dV$  趋近于 0 时，我们可以得到

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + \rho g_x \tag{34}$$

类似的我们可以得到沿  $y$  方向和  $z$  方向的关系式

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + \rho g_y \tag{35}$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \rho g_z \tag{36}$$

综上，我们可以得到介质运动的动量方程为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} \quad (37)$$

## 2.4 本章小结

本章主要介绍了连续介质力学的核心思想，了解了其本质是对介质在宏观层面的一种理想化抽象。同时我们介绍了连续介质力学中一些重要概念，主要包括场的定义、梯度、散度、旋度等概念的定义以及其对应的直观物理含义，理清这些概念的直观含义有助于我们对其定义进行推广。最后，本章主要介绍了张量、应力张量和应变张量的概念，并且讨论了一些典型的本构关系以及运动控制方程，从而使我们了解连续介质力学中基于微分方程的运动控制方程，也为下一章发展基于积分方程的非局部作用机理提供了理论指导。



## 第三章 非局部作用机理研究

### 3.1 非局部作用机理简介

虽然连续介质力学理论已经成为一种研究各种物理现象的一种有效手段，但是其存在的不足和问题也很多，归纳起来主要有以下几点：

(1) 连续介质力学存在大量近似，从而使得其理论对于初学者来说晦涩难懂。

要搞清楚这一点，我们就必须了解连续介质力学力学的发展历程。在计算机出现之前，物理学家在研究弹塑性材料的时候为了保证可解性往往需要作大量的近似。比如在研究 Euler-Bernouli 梁时，研究人员通常假设梁的横截面始终与中线垂直，而材料力学的诞生主要就是为了研究特定限制条件下材料的近似解。这就要求研究人员在进行材料结构设计时不仅能够根据近似解设计出符合条件的结构，同时也要求研究人员具备深厚的理论功底，能够清楚地知道设计过程中所用理论存在的不足。同样，在连续介质力学的发展过程中，也引入了大量的近似，比如我们要求应力和应变都是连续的，或者应力和应变之间必须满足一定关系等，所有这些假设实际上无形中增加了理论的复杂性。但对于一个新的从业人员来说，要想获得真实可信的计算结果就必须对理论中可能存在的近似有深刻的认识，这无疑增加了入门的成本。

(2) 连续介质力学理论在求解特定力学问题的数值解存疑。

我们知道连续介质力学主要通过求解微分方程的形式来获得数值解，其一般做法是首先对仿真区域进行离散，然后通过计算每一个离散单元处的应力应变关系来获得全局的解。而由于现有计算机实际上只能处理近似值，因而最终得到的解通常也只是近似解。此外，对于特定的几何模型，我们甚至可以得到数值为无穷大的解，这俨然与实际的情况不符。

(3) 连续介质力学并不适用于建模存在非连续性的介质。

由于连续介质力学的理论基石是连续性假设，因而其基本理论并不允许材料内部存在诸如裂纹或者角点等非连续性特征的存在，从而就制约了其在模拟碎裂或者颗粒流等方面的应用。我们以应变张量为例，由于其需要计算位移的梯度，而从微分的角度来看，梯度的计算依赖于相邻两点间的方向导数，且要求极限情况下的方向导数收敛。而当该点出存在裂缝时，我们并无法计算其方向导数，也就是说传统微积分理论对处理非线性

介质时并不适用。为了解决连续介质力学这一不足，研究人员逐渐发展了一些其他理论来解决非连续的问题，比如塑性力学、断裂力学等。尽管这些补充理论一定程度上弥补了连续介质力学的不足，但是也极大的增加了理论和实现的复杂性。

正是由于连续介质力学存在以上不足，研究人员才逐渐发展出了非局部作用机理来解决连续介质力学中的问题。我们知道，连续介质力学的基石是连续性假设，从而一般采用微分方程来描述介质的力学行为。也就是说连续介质内任意一点的受力情况只与该点处的应变有关，换句话说就是该点处的受力情况只与对应位置的位移导数相关。这个假设很多时候并不成立，比如当我们在原子层面考察问题时，并无法定义位移导数。所以，非局部作用机理摒弃基于微分方程的形式，它的核心思想认为介质的力学行为可以通过邻域内粒子间的直接相互作用来实现，因而可以通过积分方程来重新描述介质的力学行为[67, 68]。这样处理的好处是使得运动控制方程可以统一建模连续和非连续区域的力学行为，而不用引入额外的技术来对非连续区域进行修正。接下来我们将介绍非局部作用机理的基础。

## 3.2 非局部作用量

本节主要根据连续介质力学中场、梯度、散度、旋度的定义及直观物理含义推导出其在非局部作用机理中所对应的等效形式，并进一步给出一些基本定理的非局部作用版本，为非局部作用机理的实际应用奠定基础。

### 3.2.1 非局部场

根据场的定义，我们已知传统连续介质力学中，场的值仅与当前所处的坐标值  $\mathbf{x}$  有关。而在非局部作用机理中，我们需要考虑的量不仅与当前坐标有关，而且依赖于相隔一定距离的点坐标  $\mathbf{y}$ 。因而**非局部场**可以定义为如下形式的函数

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (38)$$

这里  $\psi$  既可以是标量也可以是矢量，从非局部场的定义我们也可以看出局部场其实是非局部场在  $\mathbf{x}=\mathbf{y}$  条件下的特例，比较典型的非局部场包括万有引力、电磁力等远程作用力。

对于非局部场，我们重点将考察两种典型的非局部场，对称非局部场和反对称局部

场，其中**对称局部场**满足下面的性质

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (39)$$

而**反对称非局部场**则需要满足如下条件

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (40)$$

下面我们探讨如何基于非局部场来定义通量、梯度、散度等基本概念。

### 3.2.2 非局部通量

设 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 表示两个不重叠的区域，如图当 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 有公共边界 $\partial\Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_2$ 时，我们根据连续介质力学关于通量的定义可以得出对于矢量场 $\mathbf{q}$ ，区域 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 之间的通量大小为

$$\int_{\partial\Omega_2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (41)$$

现在假设 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 直接并不存在接触的边界， $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 的体积分别为 $\delta V_1$ 和 $\delta V_2$ ，从 $\Omega_1$ 到 $\Omega_2$ 的通量为 $\delta Q$  如果以下公式的极限存在

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{\delta V_1 \rightarrow 0, \delta V_2 \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta V_1 \delta V_2}, \quad \text{且 } \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (42)$$

则我们称 $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为**非局部通量密度**。从定义我们可以看出 $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 含义上近似等于局部作用中的 $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ ，但是需要注意的是两者的量纲并不一致。

对于非局部通量密度，我们还可以得出以下几个重要的引理：

- (1) 自反性原理

$$\iint_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \Omega \subset \mathbf{R}^3$$

- (2) 作用与反作用原理

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbf{R}^3$$

- (3) 可加性原理

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \Omega_1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \Omega_2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x}, \\ & \quad \forall \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbf{R}^3, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \end{aligned}$$

### 3.2.3 非局部算子

下面我们来考察如何根据非局部场  $\mathbf{v}$  来计算其散度  $\mathcal{D}(\mathbf{v})$ 、梯度  $\mathcal{G}(\mathbf{v})$  和旋度  $\mathcal{C}(\mathbf{v})$ 。

根据散度定理我们已知

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (43)$$

根据其物理含义，我们知道等式右边实际上是衡量流出  $\Omega$  的通量，因此我们可以利用非局部通量进行替换，从而得到如下基于非局部形式的散度定理

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{a}) dV = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \quad (44)$$

其中  $\int_{\mathbf{R}^3} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$  实际上衡量的是  $\mathbf{x}$  点去其他区域的通量密度。但现在问题是，在已知  $\mathbf{a}$  的前提下，我们如何求得  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，这就需要借助 Schwartz 定理。

**Schwartz 内核定理：**假设  $\mathcal{D}: U \rightarrow V'$  为线性映射且连续，则存在唯一的内核函数  $\kappa \in (U \times V)'$  使得以下等式成立

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) (\mathcal{D}\mathbf{a})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) dz d\mathbf{y} d\mathbf{x} \quad (45)$$

进一步的，当  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  具有反对称性，我们可以得到

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}^3} \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - \kappa(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dz \quad (46)$$

$\mathbf{a}$  的广义散度则可以表示为

$$\mathcal{D}\mathbf{a} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - \kappa(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dz d\mathbf{y} \quad (47)$$

但实际计算过程，含有三个自变量的内核函数计算量巨大，因此为了降低计算开销，这里可以引入如下内核函数

$$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 2\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (48)$$

其中  $\delta(\cdot)$  表示脉冲函数， $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  具有反对称性，通过将该式代入广义散度的定义，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathbf{a} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - \kappa(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \, dz dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \, dz dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^3} \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^3} [\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dy
\end{aligned} \tag{49}$$

根据前面的讨论，我们可以得出，对于任意非局部标量（矢量）场，我们都可以通过选取一个内核函数来计算非局部场的广义散度。基于此，我们分别定义非局部场的梯度、散度和旋度如下

**定义：** 给定非局部  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  和向量场  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  以及反对称函数  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  和  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，我们可以通过如下公式计算

(1)  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的散度

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{R}^3} [\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dy \tag{50}$$

(2)  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的梯度

$$\mathcal{G}(\mathbf{b}) = \int_{\mathbf{R}^3} [\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dy \tag{51}$$

(3)  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的旋度

$$\mathcal{C}(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{R}^3} \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times [\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{c}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \, dy \tag{52}$$

从定义看出，对于  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  和  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，其既可以是标量，也可以是矢量或者张量。另外，根据非局部作用量的定义，我们可以很容易验证如下关系，即：

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{D}(\mathbf{a}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{G}(\mathbf{b}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{C}(\mathbf{c}) \, d\mathbf{x} = 0 \tag{53}$$

### 3.2.4 等价关系

已知非局部算子的定义，接下来我们将探讨类似于连续介质力学中常用的等价关系，在此之前，我们首先定义非局部散度、梯度和旋度的伴随算子  $\mathcal{D}^*(\mathbf{a})$ 、 $\mathcal{G}^*(\mathbf{b})$  和  $\mathcal{C}^*(\mathbf{c})$  为

$$\mathcal{D}^*(\mathbf{a})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{a}' - \mathbf{a})\alpha, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$$

$$\mathcal{G}^*(\mathbf{b})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{b}' - \mathbf{b})\beta, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$$

$$\mathcal{C}^*(\mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{c}' - \mathbf{c}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$$

设  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$  为非局部矢量场， $u$ 、 $v$  为非局部标量场， $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$ ，则我们可以验证如下恒等关系式：

$$(1) \quad \mathcal{D}(\mathcal{C}^*(\mathbf{u})) = 0$$

$$(2) \quad \mathcal{C}(\mathcal{D}^*(u)) = 0$$

$$(3) \quad \mathcal{G}^*(\mathbf{u}) = \text{tr}(\mathcal{D}^*(\mathbf{u}))$$

$$(4) \quad \mathcal{D}(\mathcal{D}^*(\mathbf{u})) - \mathcal{G}(\mathcal{G}^*(\mathbf{u})) = \mathcal{C}(\mathcal{C}^*(\mathbf{u}))$$

在给出其他恒等关系之前，我们需要先探讨一下非局部作用量的作用范围。为了保证计算的效率，我们通常假定非局部作用量的作用范围是有限的，即当超出一定范围之后的区域将不再对中心点的量产生影响，基于此，我们引入**作用区域**的概念。

定义：如图所示，给定一个开区间  $\Omega$ ，其**作用区域**  $\Omega_I$  的定义如下

$$\Omega_I := \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Omega, \exists \mathbf{x}: \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0\}$$

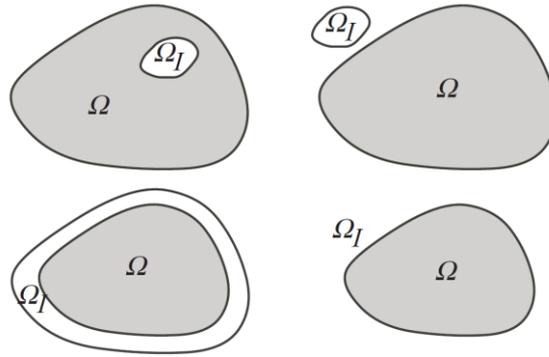


图 13 四种典型作用区域  $\Omega_I$  示意图

此外，为了表示方便，我们额外引入一下三个量：

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}) = -\int_{\Omega \cup \Omega_I} [\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{b}) = -\int_{\Omega \cup \Omega_I} [\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{c}) = -\int_{\Omega \cup \Omega_I} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times [\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{c}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] d\mathbf{y}$$

根据作用区域的定义，我们可以进一步得出如下三个恒等式

$$(5) \quad \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{a}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_I} \mathcal{N}(\mathbf{a}) d\mathbf{x}$$

$$(6) \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathbf{b}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \mathcal{S}(\mathbf{b}) d\mathbf{x}$$

$$(7) \int_{\Omega} \mathcal{C}(\mathbf{c}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \mathcal{T}(\mathbf{c}) d\mathbf{x}$$

$$(8) \int_{\Omega} u \mathcal{D}(\mathbf{a}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_t} \int_{\Omega \cup \Omega_t} \mathcal{D}^*(u) \cdot \mathbf{a} dy d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} u \mathcal{N}(\mathbf{a}) d\mathbf{x}$$

$$(9) \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{b}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_t} \int_{\Omega \cup \Omega_t} \mathcal{G}^*(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} dy d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathcal{S}(\mathbf{a}) d\mathbf{x}$$

$$(10) \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{c}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_t} \int_{\Omega \cup \Omega_t} \mathcal{C}^*(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{c} dy d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \mathbf{w} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{c}) d\mathbf{x}$$

(11) 第一格林定理:

$$\int_{\Omega} u \mathcal{D}(\mathcal{D}^*(v)) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_t} \int_{\Omega \cup \Omega_t} \mathcal{D}^*(u) \cdot \mathcal{D}^*(v) dy d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} u \mathcal{N}(\mathcal{D}^*(v)) d\mathbf{x}$$

(12) 第二格林定理:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{C}^*(\mathbf{u})) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_t} \int_{\Omega \cup \Omega_t} \mathcal{C}^*(\mathbf{w}) \cdot \mathcal{C}(\mathcal{C}^*(\mathbf{u})) dy d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \mathbf{w} \cdot \mathcal{T}(\mathcal{C}^*(\mathbf{u})) d\mathbf{x}$$

### 3.3 非局部作用动力学

#### 3.3.1 态 (State)

我们已知在传统连续介质力学中, 描述介质的动力学主要通过应力、应变及其本构关系来表示。顾名思义, 其对物理场的连续性有严格的要求, 因而对于诸如碎裂等现象的模拟通常需要借助其他手段来克服裂纹或者边界处的非连续性。为了克服这一困难, 非局部作用动力学通过引入态的概念对应力、应变等概念进行了推广。

设  $\mathcal{H}$  为以原点为中心、半径为  $r$  的球形邻域,  $\mathcal{L}_n$  为  $n$  阶张量, 则  $n$  阶态的定义如下:

**定义:**  $n$  阶态是  $\mathcal{H}$  到  $\mathcal{L}_n$  的一个映射函数  $\mathbf{A}_n \langle \cdot \rangle: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_n$ , 即  $\mathcal{H}$  中的每一个元素都对应一个  $n$  阶张量。

从定义可以看出, 对于  $\xi \in \mathcal{H}$ , 我们可以得到其映射  $\mathbf{A}_n \langle \xi \rangle$  为  $n$  阶张量, 且记所有  $\mathbf{A}_n \langle \cdot \rangle$  的集合为  $\mathcal{A}_n$ 。作为特例, 我们可以得到当  $n$  为 0 时,  $\mathbf{A}_0 \langle \xi \rangle$  对应的是标量, 所以我们称  $\mathbf{A}_0 \langle \cdot \rangle$  为**标量态**; 类似的我们称  $\mathbf{A}_1 \langle \cdot \rangle$  为**矢量态**、 $\mathbf{A}_2 \langle \cdot \rangle$  为**二阶张量态**。

基于  $n$  阶态的定义, 我们可以进一步定义如下的运算规则

规则 1: 设  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_n$ 、 $\mathbf{B} \in \mathcal{A}_n$ ， $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的和 (sum) 定义为

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\langle\xi\rangle=\mathbf{A}\langle\xi\rangle+\mathbf{B}\langle\xi\rangle \quad (54)$$

规则 2: 设  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_n$ 、 $\mathbf{V} \in \mathcal{A}_2$ ， $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{V}$  的组合 (composition) 定义为

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{V})\langle\xi\rangle=\mathbf{A}\langle\mathbf{V}\langle\xi\rangle\rangle \quad (55)$$

规则 3: 设  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{m+n}$ 、 $\mathbf{B} \in \mathcal{A}_n$ ， $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的点积 (point product) 定义为

$$(\mathbf{AB})_{i_1 \cdots i_m} \langle\xi\rangle=A_{i_1 \cdots i_m j_1 \cdots j_n} \langle\xi\rangle B_{j_1 \cdots j_n} \langle\xi\rangle \quad (56)$$

规则 4: 设  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{m+n}$ 、 $\mathbf{B} \in \mathcal{A}_n$ ， $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的内积 (dot product) 定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}=\int_{\mathcal{H}}(\mathbf{AB})\langle\xi\rangle d\xi \quad (57)$$

规则 5: 设  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_n$ ， $\mathbf{A}$  的长度 (magnitude) 定义为

$$|\mathbf{A}|\langle\xi\rangle=\sqrt{(\mathbf{AA})\langle\xi\rangle} \quad (58)$$

根据内积的定义，我们可以进一步得到  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_m$  的模的定义

规则 6: 设  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_n$ ， $\mathbf{A}$  的模 (norm) 定义为

$$\|\mathbf{A}\|=\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad (59)$$

规则 7: 设  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_n$ ， $\mathbf{A}$  的方向定义为

$$(\text{Dir}\mathbf{A})\langle\xi\rangle=\begin{cases} 0 & , \text{如果 } |\mathbf{A}|\langle\xi\rangle=0 \\ \mathbf{A}\langle\xi\rangle/|\mathbf{A}|\langle\xi\rangle & , \text{其他} \end{cases} \quad (60)$$

规则 8: 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}_1$ ，则  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的二阶张量积定义为

$$\mathbf{A} * \mathbf{B}=\int_{\mathcal{H}} \omega\langle\xi\rangle \mathbf{A}\langle\xi\rangle \otimes \mathbf{B}\langle\xi\rangle d\xi \quad (61)$$

其中  $\omega\langle\xi\rangle$  表示权重。

基于  $n$  阶态定义，对于 1 阶态，其直观含义与连续介质力学中的二阶张量的含义是类似的，即都是表示从一个向量场到另一个向量场的映射，然而两者的差别主要体现在如下几个方面：

- (1)  $n$  阶态对于  $\xi$  的连续性并没有要求，其既可以是连续也可以是非连续的；

(2) 通常来说,  $n$  阶态相对于  $\xi$  是非线性的;

(3) 对于 1 阶态, 其空间的维度是无限的, 而二阶张量的维度是固定的, 即 9。

也就是说, 态的定义比张量要广泛, 因而在实际仿真中, 基于非局部作用的方法可以使我们更方便模拟传统连续介质力学模拟存在困难的问题, 如碎裂等问题。

### 3.3.2 非局部应变

在定义非局部应变之前, 我们再次回顾一下连续介质力学中关于应变的定义。我们已知在空间中的任意一点  $\mathbf{x}$ , 该点处的应变可以通过一个二阶张量  $\mathbf{E}$  描述。假设我们以  $\mathbf{x}$  为中心选取一个球形的微元邻域, 那对于  $\mathbf{x}$  领域内任意一点  $\mathbf{x}'$ , 其形变后的位置  $\mathbf{y}'$  的位置可以近似表示为

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{E}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (62)$$

如果讲上述公式转换为  $\mathbf{y}' - \mathbf{y} = \mathbf{E}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ , 且定义  $\xi = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ , 我们实际上可以将它转为基于态的形式。

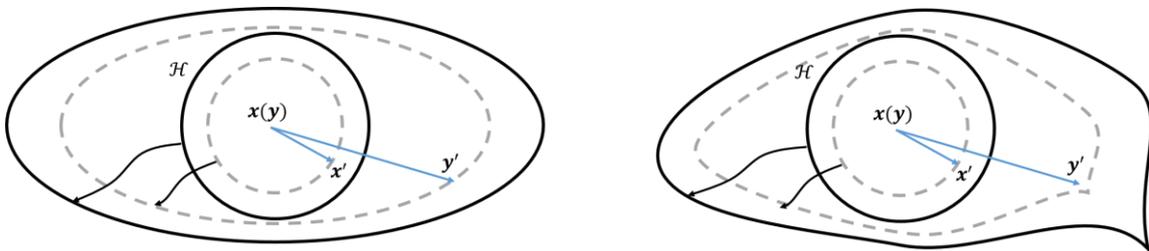


图 14 非局部形变示意图。(左) 连续性形变; (右) 非连续形变

设  $\mathbf{Y}(\xi)$  表示应变向量态, 其一般形式就可以表示为

$$\mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{y}' - \mathbf{y} \quad (63)$$

其中  $\mathbf{y}$  可以是相对于  $\mathbf{x}$  的任意函数, 这也说明态的含义要比张量广泛, 因此形变之后的场既可以是如图 14 (左) 的连续形变场, 也可以形成如图 14 (右) 所示的非连续形变场。从图上可以看出, 对于非局部应变, 初始的球形形状可以映射为任意的几何形状, 而传统二阶张量只能将球形初始形状映射成对称的椭球型, 也就是说二阶张量是 1 阶应变向量态的一个特例。为了更加准确的描述两者之间的关系, 我们引入态的扩张和收缩操作。

**定义:** 给定一个二阶张量  $\mathbf{W}$ , 如果一阶向量态  $\mathcal{E}(\mathbf{W})(\xi)$  与  $\mathbf{W}$  之间满足以下关系

$$\mathcal{E}(\mathbf{W})\langle\xi\rangle = \mathbf{W}\xi, \quad \xi = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \quad (64)$$

则我们称一阶向量态  $\mathcal{E}(\mathbf{W})\langle\xi\rangle$  扩展自二阶张量  $\mathbf{W}$ 。

同理，我们可以根据已知的一阶向量态得到对应的二阶张量，为了表示方便，我们首先引入单位向量态，即未发生任何形变的向量态如下

$$\mathbf{X}\langle\xi\rangle = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \quad (65)$$

**定义：**假设  $\mathbf{A}$  为任意向量态， $\omega$  为标量态，则我们可以通过如下缩减操作得到一个对应的二阶张量

$$\mathcal{R}\{\mathbf{A}\} = (\mathbf{A} * \mathbf{X})(\mathbf{X} * \mathbf{X})^{-1} \quad (66)$$

这里  $\mathbf{X} * \mathbf{X}$  是材料的初始形变张量，它可以反映形变之前邻域的几何形态。

根据缩减操作的定义，我们可以很容易得出对于任意二阶张量  $\mathbf{W}$ ，以下等式成立

$$\mathcal{R}\{\mathcal{E}(\mathbf{W})\} = \mathbf{W} \quad (67)$$

### 3.3.3 非局部应力

类似于非局部应变的定义，我们同样采用一阶向量态来表示每一个点邻域内的受力情况，且用  $\mathbf{T}\langle\xi\rangle$  表示。在连续介质力学中，我们已知应变和应力的关系通过本构关系描述。类似的，为了建立  $\mathbf{T}\langle\xi\rangle$  与  $\mathbf{Y}\langle\xi\rangle$  之间的关系，我们也需要通过采用本构函数来描述应力和应变之间的关系。广义地来说， $\mathbf{T}\langle\xi\rangle$  关于  $\mathbf{Y}\langle\xi\rangle$  可以表示成如下的一般形式

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{Y}, \Lambda) \quad (68)$$

其中  $\Lambda$  表示除了非局部应变之外所有可能影响内部受力情况其他因素，诸如温度、粘度、剪切率等。

理论上，我们可以选取任意的函数来建模应力和应变之间的关系，然而对于实际材料，并不是任意选择的本构函数都可以得到符合物理真实的模拟结果。首先，我们要求非局部应力满足角动量守恒定律(Angular Momentum Conservative)。关于这一点我们可以通过以下定理来验证。

**定理：**对于给定的应力向量态  $\mathbf{T}\langle\xi\rangle$ ，只要其满足如下关系式

$$\int_{\mathcal{H}} \mathbf{Y}\langle\xi\rangle \times \mathbf{T}\langle\xi\rangle d\xi = 0 \quad (69)$$

则可以保证采用该本构关系的物体在运动过程中始终保持动量守恒。具体证明过程可以参见[68]。

根据以上定义，我们可以看出，当  $\mathbf{T}\langle\xi\rangle$  的方向与  $\mathbf{Y}\langle\xi\rangle$  的方向一致时，我们可以保证材料的动量守恒。因此当  $\mathbf{T}\langle\xi\rangle$  与  $\mathbf{Y}\langle\xi\rangle$  的方向始终保持一致时，我们称这样的本构关系为常规本构关系，对于这样的材料，其应力可以表示为以下的形式

$$\mathbf{T}\langle\xi\rangle = t\langle\xi\rangle(\text{Dir}\mathbf{Y})\langle\xi\rangle \quad (70)$$

作为特例，当  $\mathbf{T}\langle\xi\rangle$  同时满足  $\mathbf{T}\langle\xi\rangle = -\mathbf{T}\langle-\xi\rangle$  条件时，我们称符合这种特性的材料的本构关系为基于键的本构关系，典型的材料如弹簧。最后当相邻点受力的方向不一致时，我们称这样的材料为非常规材料，对于其本构关系，我们在处理过程中需要特别注意其是否满足角动量守恒定理。图 15 所以给出三种典型本构关系的示意图。

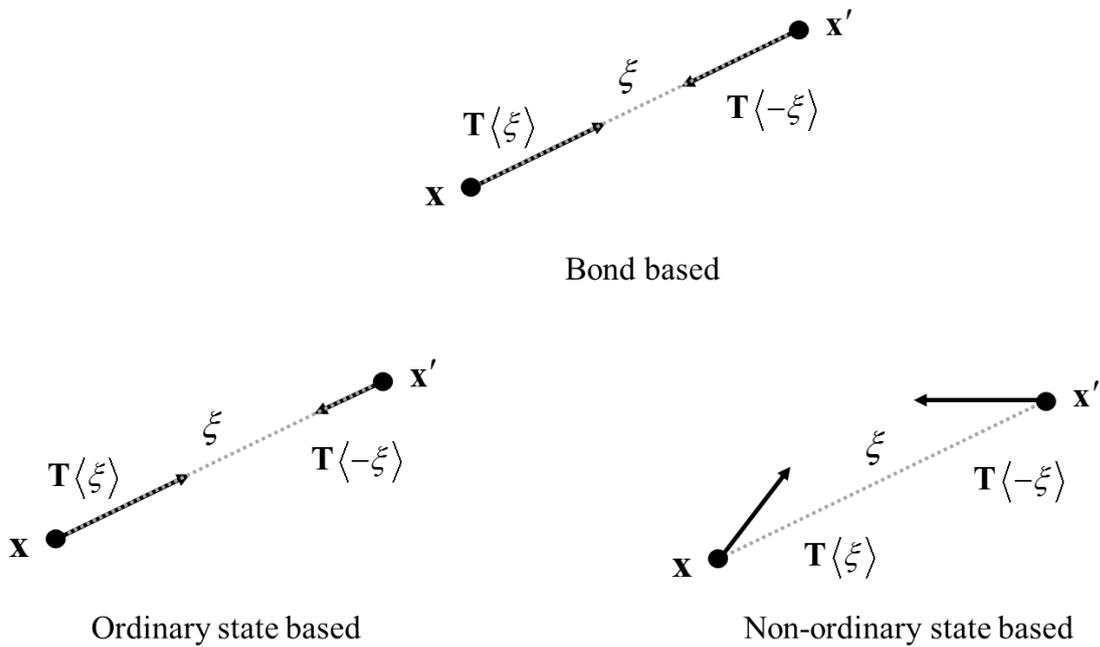


图 15 三种典型的非局部应力

其次，我们要求材料具有客观性 (**Objectivity**)，即

$$\mathbf{T}\langle\mathbf{Q} \circ \mathbf{Y}\rangle = \mathbf{Q} \circ \mathbf{T}\langle\mathbf{Y}\rangle, \quad \mathbf{Y} \in \mathcal{A}_1 \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{Q} \quad (71)$$

其中  $\mathcal{Q}$  表示正交向量态，其作用是将向量旋转一定角度。

对于常规材料，我们可以验证如下定理：

**定理：** 常规材料符合客观性当且仅当其满足如下条件时成立[68]

$$t\langle \mathbf{Q} \circ \mathbf{Y} \rangle = t\langle \mathbf{Y} \rangle, \mathbf{Y} \in \mathcal{A}_1, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q} \quad (72)$$

### 弹性材料应力

对于弹性材料，其内能通常可以表示成  $W(\mathbf{Y})$ ，因此其应力也可以通过计算如下公式得到

$$\mathbf{T}\langle \mathbf{Y} \rangle = \nabla W(\mathbf{Y}) \quad (73)$$

另外对于常规材料，我们可以验证其具有如下性质：

- (1) 存在一个标量函数满足  $w$

$$W\langle \mathbf{Y} \rangle = w(\mathbf{y}), \mathbf{y} = |\mathbf{Y}|$$

- (2) 对于该标量函数，我们有

$$t\langle \mathbf{y} \rangle = \nabla w\langle \mathbf{y} \rangle$$

### 3.3.3 运动控制方程

#### 质量守恒定理

我们首先将基于非局部作用机理对连续性方程进行离散

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

假设我们已知任意两点间的通量密度  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，则基于非局部作用机理的连续性方程可以表示为

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t} + \int_{\mathcal{H}} [\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \quad (74)$$

关于  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的具体定义我们将在下一章研究流体的过程中给出。

#### 动量守恒定理

类似的，当我们已知材料的非局部应力  $\mathbf{T}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$  时，我们可以将连续介质力学中的动量方程转化为如下的形式

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \int_{\mathcal{H}} [\mathbf{T}(\mathbf{x})\langle\xi\rangle - \mathbf{T}(\mathbf{x}')\langle-\xi\rangle] d\xi + \mathbf{g} \quad (75)$$

### 3.4 本章小结

本章首先讨论了连续介质力学存在的不足，归纳起来主要有三方面

- (1) 连续介质力学存在大量近似，从而使得其理论对于初学者来说晦涩难懂。
- (2) 连续介质力学理论在现代计算机上解的可靠性存疑。
- (3) 连续介质力学并不适用于建模非连续性介质。

为了解决上述问题，我们引入非局部作用机理并简要介绍了其核心思想是通过邻域内粒子的直接相互作用力来建模介质的运动控制方程。随后，我们根据连续介质力学中场、梯度、散度和旋度的直观含义在非局部作用机理的框架下重新定义了非局部框架下的场、梯度、散度和旋度。同时为了建模运动控制方程，我们引入了和张量所对应的态的概念，从而可以将连续介质力学中应力张量、应变张量等只适用于描述连续介质的量拓展到适用于描述连续和非连续介质的应力态和应变态。最后，本章给出了基于非局部作用机理的运动控制方程的基本形式。接下来我们将重点讨论非局部作用机理在流体仿真、弹塑性材料模拟上的应用。



## 第四章 非局部作用机理在流体仿真中的应用

### 4.1 引言

在图形学领域，粒子法因其良好的拉格朗日特性而一直以来都被作为一种重要的仿真方法来模拟不可压缩自由表面流。一般而言，模拟自由表面流的粒子方法大致可以分为两类：其中一类是基于状态方程（Equation of State）来实现，具体实现策略包括基于非迭代形式[9]和基于迭代策略[10, 15, 69]；另一类则是基于投影的方法，主要策略也包含两种，即通过密度恒定[11]或保证流场散度为零[13]来实现。尽管所有这些方法在模拟水花飞溅场景的时候都能得到比较理想的效果，然而当我们模拟比较精细的流体特性时，现有方法都存在不足。一个典型的例子如图 16 所示，据我们所知，目前粒子法依然无法有效的模拟这样的场景，主要难点体现在几方面：第一，诸如 SPH 这样的粒子法存在拉伸不稳定性，也就是说当粒子之间存在拉力时，很容易导致数值断裂，从而破坏流体的细节特征（如图中所展示的一些薄膜和拉丝等特征）。第二，基于粒子法的自由表面流仿真在边界处存在粒子缺失的问题，从而严重影响仿真精度。第三，正是由于拉伸不稳定和边界粒子缺失等问题的存在，导致在计算表面张力时计算误差较大，无法精

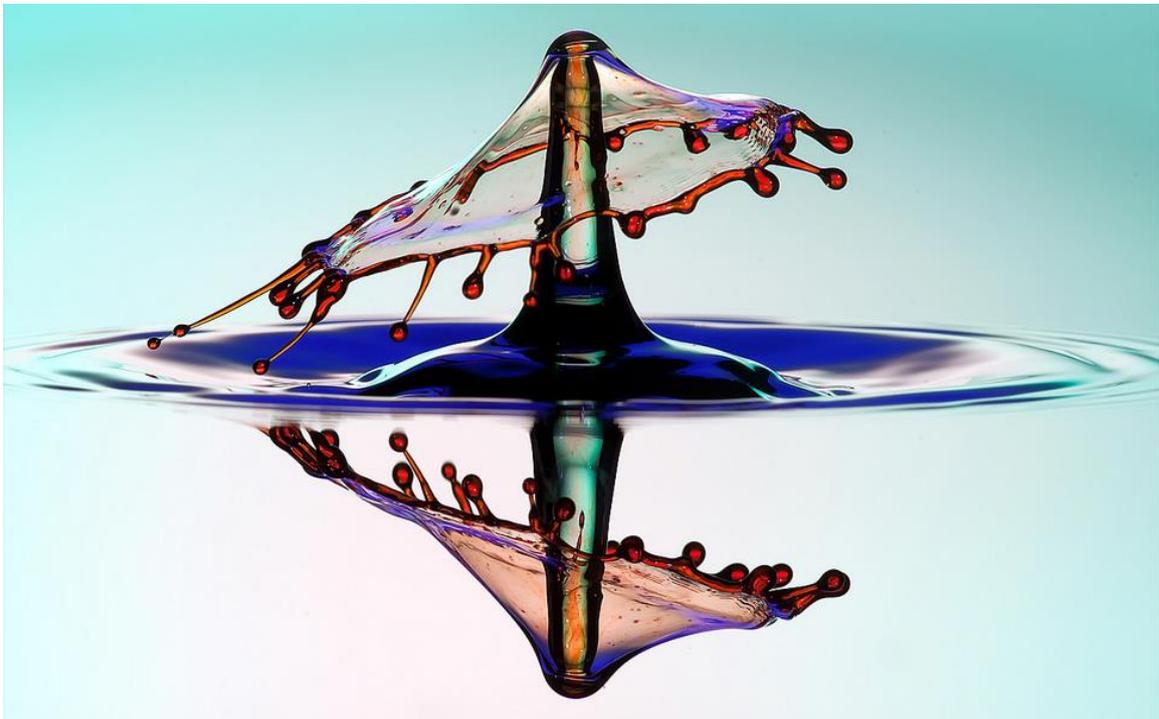


图 16 高速相机下的流体形态

确计算流体的表面张力，同时粒子法也无法有效建模自由表面处的一些附属特征，诸如表面张力波的扩散等。

为了解决上述问题，我们首先来看粒子法的拉伸不稳定性和边界粒子缺失的问题。一般来说，拉伸不稳定产生的原因不仅与当前的应力状态有关而且还与核函数的选择有关。当粒子处于拉伸应力状态下时，粒子的运动就有可能变得不稳定[29]，直接的结果就是可能导致粒子聚集到一起，更坏的情况则是导致整个仿真程序的崩溃，这也是拉伸不稳定性名称的由来。为了避免产生拉伸不稳定，许多研究通过将负压强截断零[11, 13]或者通过添加排斥力[16]的手段来消除拉伸不稳定的影响。尽管上述方法可以保证程序的稳定，但是却严重影响仿真结果的精度，一种显然的瑕疵就是流体内部有可能凭空产生空洞。但是，根据 Belytschko 和 Xiao[70]得出的结论，只要存在欧拉核函数参与拉格朗日框架中物理量的计算，就不太可能彻底消除拉伸不稳定性。幸运的是，我们可以通过提高粒子方法的精度来尽可能的减少拉伸不稳定性所带来的影响。我们知道，目前粒子法的不精确性主要是由于边界处粒子的缺失造成，因此可以通过解决边界粒子缺失的问题来提高计算的精度。

近年来也有研究人员试图通过修正边界粒子的来提高计算精度。Nair 和 Gaurav[71]首先提出了半解析 (Semi-Analytic) 方法来施加自由表面处压强边界条件，此外还对泊松方程的拉普拉斯算子进行了修正，从而提高了自由边界条件的精度。杨等人[84]进一步对压强力的计算方式进行了修正，从而使得算法可以精确处理负压强的情况。然而这两种方法的局限在于前者只考虑拉普拉斯算子的修正，而后者则主要侧重于压强力的修正。通过仿真实验我们仿真，仿真结果不仅与拉普拉斯算子有关，且与速度场的散度以及压强力的表达形式都相关。如果每一项都是独立改进，最终结果也不一定能得到一个稳定、精度的仿真结果。基于这一发现，本章将从非局部作用机理框架入手重新研究流体的不可压缩性，并根据边界的粒子分布情况对靠近边界处的粒子进行额外处理来提高计算精度，尽可能的降低拉伸不稳定的影响。

受基于变分的仿真框架[37]和非局部方法[68, 72]的启示，本节基于非局部作用原理提出一种模拟自由表面流的非局部仿真框架。在该仿真框架下，我们可以阐明拉普拉斯算子以及梯度算子具体的离散形式以及他们之间应该满足的联系。此外，基于非局部框架，我们可以进一步对边界处的精度进行修正。具体来说，本节研究的方法贡献主要体现在以下几个方面：

- (1) 提出一种基于非局部作用机理的不可压缩自由表面流的仿真方法，其可以有效解决消除粒子法中的拉伸不稳定性以及改进边界由于粒子缺失导致的精度问题，得到高精度的仿真结果。
- (2) 基于 Helmholtz 自由能提出一种新的表面张力模型，该模型可以保证在边界处粒子不足的情况下依然可以精确计算表面张力的大小。
- (3) 基于压力波提出了一种近似的表面张力波的计算方法，该方法可以直接在不提取流体表面的前提下进行计算，从而避免了提取流体表面的过程，提高了计算效率。

## 4.2 相关研究工作

### 基于状态方程的方法

最初的时候，图形学的研究人员通过采用 (EOS) 气体方程[8]或 Tait 方程来模拟弱可压的流体。然而这类方法最大的限制在于要求的时间步长较小，从而仿真效率不高。为了消除这一限制，Solenthaler 和 Pajarola[10]提出了 Predictive-corrective SPH (PCISPH) 方法，它通过不断迭代来修正流体的密度误差，从而使得可以选的时间步长相比于传统弱可压缩 SPH 方法提升了两个数量级。He 和他的同事[69]则指出迭代方法的收敛速度实际上与邻域的大小有关，因此提出一种基于局部泊松方程不可压缩流体求解方法。类似的，Bodin 和他的同事们[14]通过引入约束条件来求解流体不可压缩性。最近，Macklin 和 Muller[15]基于 PBD 方法提出一种具有更快收敛性的不可压缩流体求解方法。更多关于基于状态方程求解不可压缩流体的相关内容也可以参考综述文章[28]。

### 基于投影的方法

我们知道，基于投影的不可压缩 SPH 方法在计算机图形学中的应用一直不如基于 EOS 的方法发展顺利。其主要原因是压力泊松方程的求解精度严重受仿真粒子分布以及边界粒子缺失等问题的困扰。为了改善这一情况，He 和他的合作者[12]提出了一种基于交错粒子的方法来解决零能问题 (zero-energy mode)，但是该方法并未处理边界粒子缺失的问题。Ihmsen 等人[11]则提出一个隐式的不可压缩性 SPH (IISPH) 方法。但是，IISPH 方法属于精确投影方法，因此当流体压强不被截断到零时，依然存在压强的零能问题[73]，从而影响仿真精度。Bender 和 Koschier[13] 改进了 IISPH 方法，并通过迭代方

式不断提升不可压缩性来最终达到不可压缩的条件。不幸的是，拉伸不稳定和边界粒子缺失等问题依然存在。当然，也有其他一些研究人员另辟蹊径，通过一些混合方法实现，比如利用均匀背景网格来求解泊松方程[74, 75]。

### 表面张力模型

粒子法关于表面张力模型的研究最初主要针对多相流展开[76]，因此大部分工作都是基于连续表面力（CSF）方法计算表面张力。为了提高 CSF 模型的稳定性和计算精度，Hu 和 Adams[77]在计算表面张力时通过计算一个应力张量的散度来完成。Sirotkin 和 Yoh[78]提出了一种新的平滑内核和梯度校正方法用以消除 CSF 模型在压缩状态变的不稳定性。另一种表面张力的计算模型则主要通过直接计算颗粒间相互作用力（IIF）来完成，如 Nugent 和 Posch[79]所采用的方法。通过适当的将排斥力和吸引力进行组合，Tartakovsky 和 Meakin[80]利用 IIF 方法进行了有效的表面张力及流固耦合的模拟。类似的，Becker 和 Teschner[9]在模拟自由表面流时也采用了 IIF 方法。最近，Akinci 和同事们[17]提出一种结合 CSF 和 IIF 各自优势的方法，从而可以用来模拟大强表面张力的效果。

### 数值稳定性问题

虽然目前不少 SPH 方法都是通过截断压强值的方式来消除拉伸不稳定性，但是要想得到精确的仿真结果，我们并不能简单对压强的数值进行修改，而是需要设计一套精确求解压力泊松方程的算法。据我们所知，计算机图形领域只有很少一部分研究是致力于解决上述数值问题。Schechter 和 Bridson[20]通过生成虚拟空气颗粒来解决边界粒子不足的问题，但是虚拟粒子生成的计算开销较大，且无法保证仿真的连续性。为了消除拉伸不稳定性，Macklin 等人[15]和 He 等人[16]则通过引入额外的压强来抵消拉伸力产生不稳定性，虽然这在一定程度上可以消除拉伸不稳定，但是额外压强力的引入也对流体运动形态产生了一定的影响。当然，SPH 方法的数值稳定一直以来也是工程仿真关注的热点和难点。尽管如此，目前依然没有找到有效的克服拉伸不稳定性的办法。关于数值稳定方面的一个比较好的综述可以参考最近基于投影的 SPH 方法的综述[81]。

## 4.3 不可压缩流体求解

根据连续介质力学理论，当采用投影方法来求解流体不可压缩形式，我们要求解

以下连续性方程以及压强泊松方程

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) &= \nabla \cdot \mathbf{v}^*, \quad \text{inside } \Omega, \\ p &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (76)$$

其中  $\Omega$  表示流体所在区域， $\partial\Omega$  则表示区域边界， $p$  表示流体压强， $\rho$  是流体密度， $\mathbf{v}^*$  是投影之前的速度场。根据变分原理，上述控制方程可以重新表述为一种基于能量最小化的形式

$$\min_p \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left\| \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right\|^2 dV, \quad p = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (77)$$

根据公式 77，求解流体不可压缩性的过程实际上可以直观的理解为是利用压强力最大限度的耗散动能的过程。所以现在问题变成我们如何利用无网格方法求解公式 77 达到能量最小时的解。

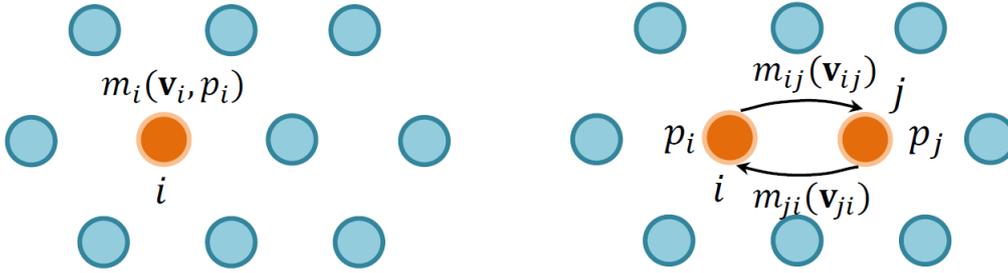


图 17 粒子分布示意图。(左) 传统 SPH 粒子分布；(右) 基于非局部作用机理的粒子分布

图 17 展示了传统 SPH 方法流体被离散化成粒子之后的形态，其中每个粒子带有一定数量的物理属性，包括质量  $m_i$ 、速度  $\mathbf{v}_i$  以及  $p_i$  等。由于传统 SPH 中所有物理量都是定义在粒子上，所以在接下来的讨论这中，我们称这种方法为局部方法。当我们将所有局部物理量代入公式 77，我们可以将其离散化为以下形式

$$\min_p \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\| \mathbf{v}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho_0} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left( \frac{p_i + p_j}{2} \right) \nabla_i W \right\|^2 \quad (78)$$

其中对于靠近边界处的粒子，其压强需要施加零边界条件。我们对其求相对于每个粒子位置的偏导数时，就可以将其转化为一个线性方程组。从线性方程的形式我们可以看出，从公式 78 导出的泊松方程属于精确投影。但是，Cummins 和 Rudman[73]指出精确投影方法存在零能问题，因此压强场存在不自然的抖动。其主要原因就在于压强和速度的定义都处在同一位置，这就促使我们基于非局部原理来重新对流体的能量进行离散。

如图 17 (右) 所示, 我们对流体的质量和速度进行了重新分布, 即将流体的质量和速度都定义成了如下形式的非局部场

$$m_{ij} = \underline{m}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad \mathbf{v}_{ij} = \underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (79)$$

此外, 我们假设  $m_{ij}$  所受到的压强力只与粒子  $i, j$  有关, 而且邻域内的其他粒子无关, 即  $m_{ij}$  所受压强的梯度可以表示为

$$\nabla_{ij} p = \frac{p_j - p_i}{r_{ij}} \mathbf{n}_{ij} \quad (80)$$

其中  $r_{ij}$  表示粒子  $i$  与  $j$  之间的距离,  $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / r_{ij}$  代表单位向量。将以上非局部物理量都代入公式 77 我们就可以得出如下的形式

$$\min_p \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_{ij} \left\| \mathbf{v}_{ij}^* - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left( \frac{p_j - p_i}{r_{ij}} \right) \mathbf{n}_{ij} \right\|^2 \quad (81)$$

从其形式上我们可以看出, 目前速度和压强的定义已经分离, 从而可以有效避免压力场抖动的问题。

下面我们主要考察如何定义非局部物理量  $m_{ij}$  和  $\mathbf{v}_{ij}$ , 我们已知传统 SPH 中质量与速度都定义在粒子上, 所以当对粒子的质量和速度进行重新分配时, 我们需要保证其质量和动量守恒。基于此, 我们将非局部质量和速度定义为

$$m_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{\alpha_i} m_i, \quad \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i \quad (82)$$

其中  $\omega_{ij}$  表示对称权重函数,  $\alpha_i = \sum_j \omega_{ij}$ 。从上述定义我们可以很容易验证质量和动量是否满足守恒定理。但是这里需要注意  $m_{ij}$  与  $m_{ji}$  有可能并不相等, 其主要原因在于粒子的分布可能并不均匀, 从而导致  $m_{ij}$  与  $m_{ji}$  产生差异。当我们将公式 81 代入到并求导时, 我们就可以得到如下形式的线性方程组

$$\sum_j \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_j} \right) \frac{p_i - p_j}{r_{ij}^2} \omega_{ij} = \frac{1}{\Delta t} \sum_j \left( \frac{\mathbf{v}_i^*}{\alpha_i} + \frac{\mathbf{v}_j^*}{\alpha_j} \right) \cdot \frac{\mathbf{n}_{ij}}{r_{ij}} \omega_{ij}, \quad (83)$$

当然在推导过程中, 我们假设了流体的密度为常量。

### 自由表面边界条件

接下来，我们将重点考察如何施加合理的边界条件来提高计算精度。为了方便起见，这里我们先定义一些常见的符号。对于邻域被自由表面边界截断的所有粒子集合，我们记作  $\mathcal{P}^a$ ，而对于邻域被固体边界截断的粒子集合则记作  $\mathcal{P}^s$ 。此外，我们标记虚拟气体粒子为  $j^a$ ，虚拟固体粒子为  $j^s$ ，而仿真粒子则标记为  $j^b$ 。

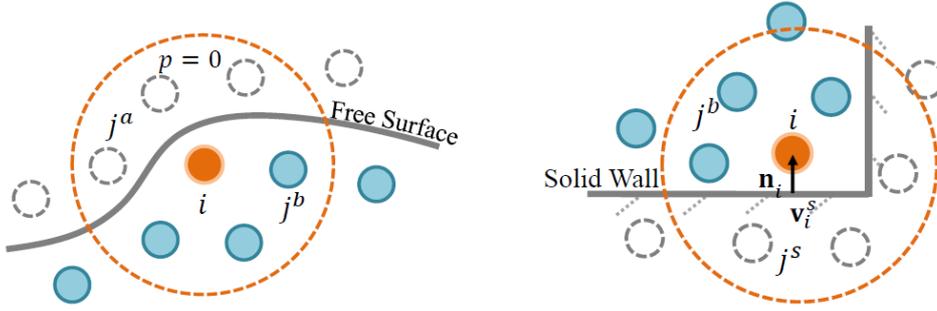


图 18 边界粒子分布示意图

图片 18（左）展示了一个典型的处于自由表面的粒子及其邻域的分布。受网格法在处理自由表面边界条件上的启示[82]，我们也可以将虚拟粒子的压强设置为 0 并代替进入公式 83 从而将其拉普拉斯算子的形式重新表述成新的形式

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{A_i}{\hat{\alpha}_i} + \sum_{j^b} \frac{\omega_{ij}}{\hat{\alpha}_j r_{ij}^2} \right) p_i - \frac{1}{\rho_0} \sum_{j^b} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}_i} + \frac{1}{\hat{\alpha}_j} \right) \frac{\omega_{ij}}{r_{ij}^2} p_j \quad (84)$$

其中

$$A_i = \sum_{j^a \cup j^b} \frac{\omega_{ij}}{r_{ij}^2}, \quad \hat{\alpha}_i = \sum_{j^a \cup j^b} \omega_{ij}.$$

通常情况下，我们并不知道  $\hat{\alpha}_i$  与  $A_i$  该如何计算，主要原因在于实际仿真中我们并没有真正去创建空气粒子。但是，如果当粒子  $i$  的邻域只包含  $j^a$  和  $j^b$  两种类型的粒子时，我们实际上可以利用半解释方法来近似的计算  $\hat{\alpha}_i$  与  $A_i$  的值。其核心思想是在仿真开始之前构建一个邻域完整原型粒子，然后根据其计算两个阈值  $\alpha_0$  与  $A_0$ 。实际仿真过程中，我们就利用这两个值对每个粒子进行如下形式的归一化

$$A_i = \max(A_0, A_i), \quad \hat{\alpha}_i = \max(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_i) \quad (85)$$

也就是当邻域粒子存在缺失时，我们就用一个根据原型粒子计算得出的值对其进行替换。该方法虽然只是一种近似，但是可以较大程度的提升仿真精度。

## 固体边界条件

在传统 SPH 方法中，固体边界条件的施加主要通过创建固体边界粒子来实现[83]。尽管通过创建固体边界粒子的方法施加固体边界条件的方法实现简单，但是也造成了额外的存储和计算开销。因此本文采用类似于施加自由表面边界条件的方法来施加固体边界条件。图 18（右）展示了处于固体边界处理的一个粒子及其邻域。根据速度场的分布，我们已知  $\mathbf{v}_{ij^s}$  的初始速度为  $\mathbf{v}_i$ 。当粒子  $i$  靠近固体边界时，我们就需要对其速度进行修正，保证其不会穿透固体边界，因而要求修正后的速度满足以下关系式

$$\left(\mathbf{v}_{ij^s}^{t+1} - \mathbf{v}_i^s\right) \cdot \mathbf{n}_{ij^s} = 0 \quad (86)$$

其中  $\mathbf{v}_i^s$  表示的是固体边界距离粒子  $i$  最近点处的速度。直观的说，公式 86 实际是保证流体沿  $\mathbf{n}_{ij^s}$  方向的通量为 0，所以流体不会从这个方向渗透进入固体。另外，根据速度的更新公式

$$\mathbf{v}_{ij^s}^{t+1} = \mathbf{v}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho_0} \left( \frac{p_{j^s} - p_i}{r_{ij^s}} \right) \mathbf{n}_{ij^s} \quad (87)$$

得出，我们在求解压强泊松方程的时候实际上并不需要计算  $p_{j^s}$ 。我们唯一需要做的只是对边界粒子的  $\hat{\alpha}_i$  与  $A_i$  值进行如下形式的修正

$$A_i = \sum_{j^b} \frac{\omega_{ij}}{r_{ij}^2}, \quad \hat{\alpha}_i = \max(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_i). \quad (88)$$

这样，压强泊松方程的拉普拉斯算子已经根据相应的边界条件进行了修正，剩下的就是对等号右边的散度项进行修正。根据粒子的分类，我们已经知道散度项主要由三部分组成，第一部分是来自其他流体粒子，其形式已经在公式 83 给出，而第二部分则是由虚拟空气粒子产生，其形式可以表示为

$$\mathcal{D}^a = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j^a} \frac{\mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{n}_{ij}}{\hat{\alpha}_i r_{ij}} \omega_{ij} \quad (89)$$

最后一部分则是由虚拟固体粒子产生，其表达形式为

$$\mathcal{D}^s = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j^s} \frac{\mathbf{v}_i^s \cdot \mathbf{n}_{ij}}{\hat{\alpha}_i r_{ij}} \omega_{ij} \quad (90)$$

但是根据前文的讨论，我们在实现过程中实际上并不生成任何虚拟粒子，因而假设对于某个粒子如果邻域粒子并不缺失，那么它应该满足如下关系式

$$\sum_j \frac{1}{\hat{\alpha}_i} \cdot \frac{\mathbf{n}_{ij}}{r_{ij}} \omega_{ij} = 0 \quad (91)$$

我们将该关系式代替入公式 89 和 90 并合并所有散度项可以得到如下公式

$$\mathcal{D}_i = \frac{1}{\Delta t} \begin{cases} \sum_{j^b} \left( \frac{\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^*}{\hat{\alpha}_j} + \frac{\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_{i^s}}{\hat{\alpha}_i} \right) \cdot \frac{\mathbf{n}_{ij}}{r_{ij}} \omega_{ij}, i \in \mathcal{P}^s. \\ \sum_{j^b} \left( \frac{\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^*}{\hat{\alpha}_j} \right) \cdot \frac{\mathbf{n}_{ij}}{r_{ij}} \omega_{ij}, otherwise. \end{cases} \quad (92)$$

现在我们就可以对压强泊松方程进行求解，然后根据得到的压强场对速度场进行更新，在利用压强对流体速度进行更新的过程中，我们同样需要考虑边界条件的影响，所以压强力的计算公式如下

$$\mathbf{F}_i^p = \frac{1}{\rho_0} \begin{cases} \sum_{j^b} \frac{\omega_{ij}}{\hat{\alpha}_i} p_j \frac{\mathbf{n}_{ij}}{r_{ij}}, i \in \mathcal{P}^a \\ \sum_{j^b} \frac{\omega_{ij}}{\hat{\alpha}_i} (p_j - p_i) \frac{\mathbf{n}_{ij}}{r_{ij}}, otherwise \end{cases} \quad (93)$$

此外，如果当粒子属于  $\mathcal{P}^s$  我们还需要考虑边界对粒子速度的影响，因此需要额外增加以下形式的修正项

$$\Delta \mathbf{v}_i = \left( 1 - \sum_{j^b} \frac{\omega_{ij}}{\hat{\alpha}_i} \right) [(\mathbf{v}_i^s - \mathbf{v}_i^*) \cdot \mathbf{n}_i] \mathbf{n}_i \quad (94)$$

下面我们通过测试标准测试样例来检验本文提出方法的准确性以及在消除拉伸不稳定方法的有效性。第一个实验主要测试流体在正压强的作用下的稳定性，如图 19 展示了四种典型方法在  $t = 0.8s$  时的流体形态。其中我们可以看出精确投影方法存在零能不稳定

性，而近似投影方法都可以取得较为精确的仿真结果。

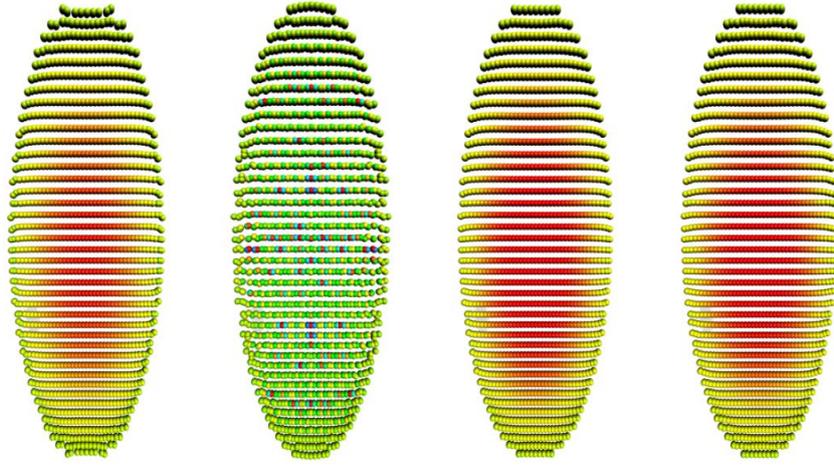


图 19 四种典型方法在测试拉升 Benchmark 的实验结果(从左到右依次为 SSPH[12]、DVSPH[13]、SASPH[84] 和本文中的方法)。

为了进一步比较各自的精度，图 20 对样点  $B$  处速度曲线进行了比较，我们发现在当压强为负时大部分算法都可以较为精确地求解流体的不可压缩性。其原因在于拉伸不稳定性的问题通常只存在于负应力区域。所以，接下来我们主要考察当压强为负时，各算法的稳定性。

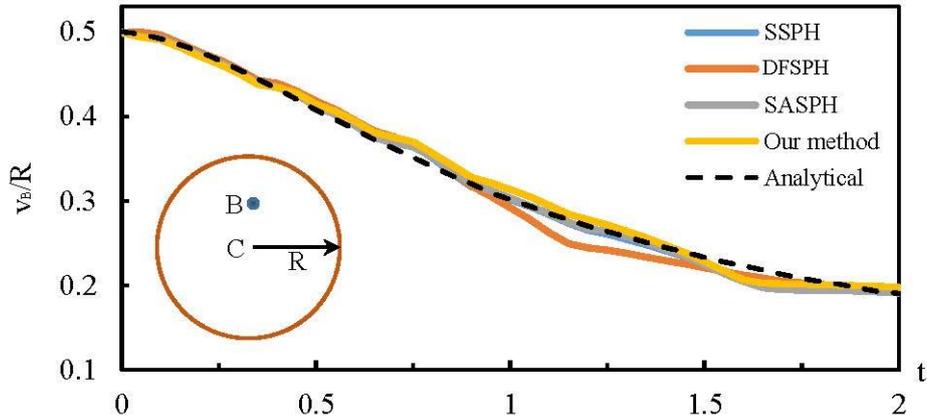


图 20 拉升 Benchmark 精度比较

为了考察流体在负压强力作用下的稳定性，我们考虑如图 21 所示的测试样例。其初始形态为一个正方形，并且给予一个初始角速度  $\omega$ 。由于其运动是完成扩展，因此其主要承受负压强力。

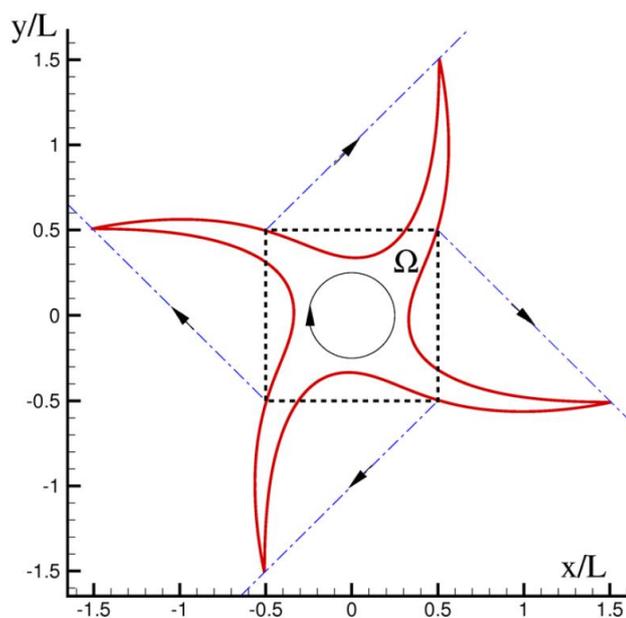


图 21 旋转 Benchmark 示意图[85]

尽管这个测试样例对于诸如有限体积法来说并不存在难度，但是对于粒子法来说，由于拉伸不稳定性的存在，使得传统 SPH 方法很难通过该样例的测试。图 22 展示了几种典型的方法在模拟这一场景时的表现。从中我们可以发现，只有我们的方法在  $t = 5s$  时依然保持较好的稳定性。

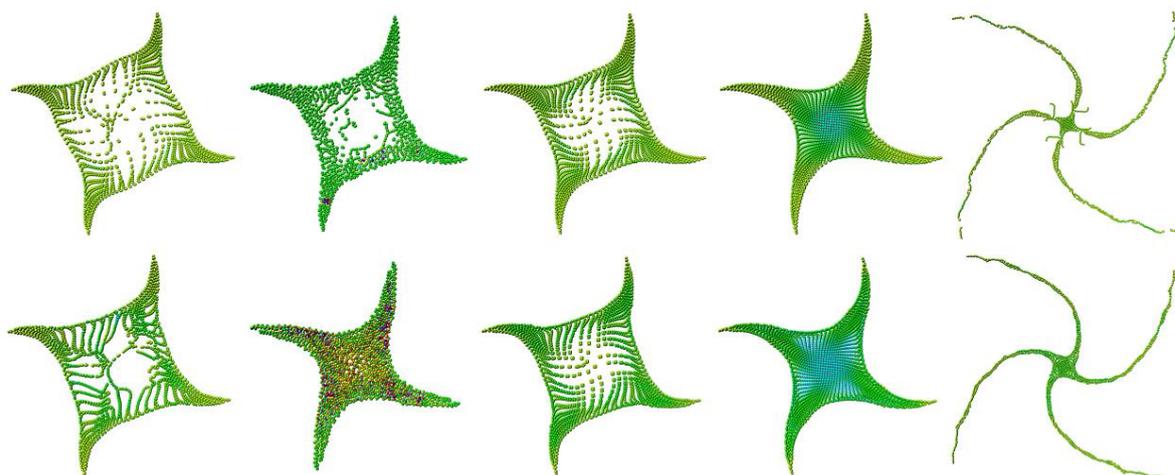


图 22 拉升 Benchmark 测试结果比较。前四组表示  $t = 1.7s$  时刻的结果(从左到右依次为 SSPH[12]、DVSPH[13]、SASPH[84]和本文中的方法)，最后一组表示表示本文方法在  $t = 5s$  时刻的结果。上排未对粒子进行校正，下排则是对粒子进行一定校正之后的实验结果。

最后，由于 SPH 仿真精度通常受粒子分布的影响，因此我们也可以通过采用[15]中

的方法来对粒子分布进行一定的校正,从而得到更加精确的仿真结果,如图 17 下排实验结果所示。但是我们也注意到,粒子的重新分布并未对其他方法的精度的提升带来太多影响。

#### 4.4 流体表面张力

接下来我们将重点考虑如何计算精确的表面张力。我们已知在连续介质力学中,表面张力一般都是通过计算表面法向的散度得到。但是对于粒子法,我们并不确定流体表面的具体位置,因而通过计算法向散度的方法不仅精度低,而且稳定性差。因此,本文将采用基于能量的形式来计算流体的表面张力。

根据 Helmholtz 自由能的定义,我们知道靠近边界处的流体的自由能可以表示为

$$\mathcal{E} = \int_V \left[ f(c) + \frac{\kappa}{2} |\nabla c|^2 \right] dV \quad (95)$$

其中  $c$  表示浓度场,  $f(c)$  表示内能,  $\kappa$  是二次项系数。当某一点完全处于流体内部时,我们可以认为  $c$  的值为 1,而如果  $c$  完全处于外部时则为 0,其它时候  $c$  可以是 0 到 1 之间的任意值。从该定义我们可以看出,此时流体边界已经不是传统意义上没有厚度的表面,而是具有一定宽度且连续变化的过渡带。而表面张力的作用其实是使得过渡带的面积尽可能的小。

基于上述思想,我们定义粒子上每一点处  $c$  的值为 1,然后通过以下公式计算其梯度

$$\nabla_i c = \frac{\sum_j V_j c_j \nabla_i W_{ij}^h}{\sum_j V_j W_{ij}^h}, \quad (96)$$

其中  $V$  表示粒子的体积,  $W$  为权重函数。在计算表面张力时,我们假设  $\frac{\kappa}{2} |\nabla c|^2$  所形成的场连续,且全局能量最小化可以通过最小化每一个点的能量来实现。因此我们就可以得到如下形式的表面张力计算公式

$$\mathbf{F}_i^s = V_i \nabla_i \left( \frac{\kappa}{2} |\nabla_i c|^2 \right) = \frac{\kappa}{2} \sum_j V_i V_j |\nabla c_j|^2 \nabla_i W_{ij}^h \quad (97)$$

从上述定义我们可以看出,如果当粒子处于流体内部时由于粒子的均匀,因而  $\nabla c_j$  的值会近似等于 0,这也与表面张力值存在于流体表面区域这个假设相符。而当粒子处于流体

表面附近时，其受力情况如图 23 所示

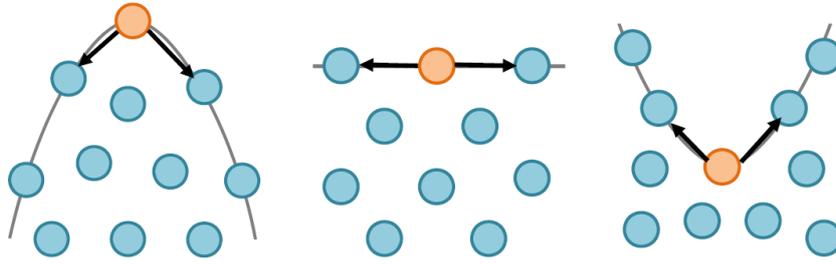


图 23 三种典型表面结构边界粒子受力情况示意图

但是，公式 97 的不足在于其并不满足动量守恒定律。因此，如果要保证动量守恒，我们就需要用到以下形式的表面张力计算公式

$$\mathbf{F}_i^s = \frac{\kappa}{2} \sum_j V_i V_j \left( \frac{|\nabla c_i|^2 + |\nabla c_j|^2}{2} \right) \nabla_i W_{ij}^h \quad (98)$$

相比于传统基于表面法向的方法，本文方法由于基于自由表面能来定义，从而即使在粒子稀疏区域也同样适用。此外本文方法不仅可以精确计算凸表面的表面张力，同时也适用于计算凹表面的表面张力，图 24 对比了集中典型方法在计算表面张力时的效果。可以看出，只有本文方法可以得出比较精确的计算结果。

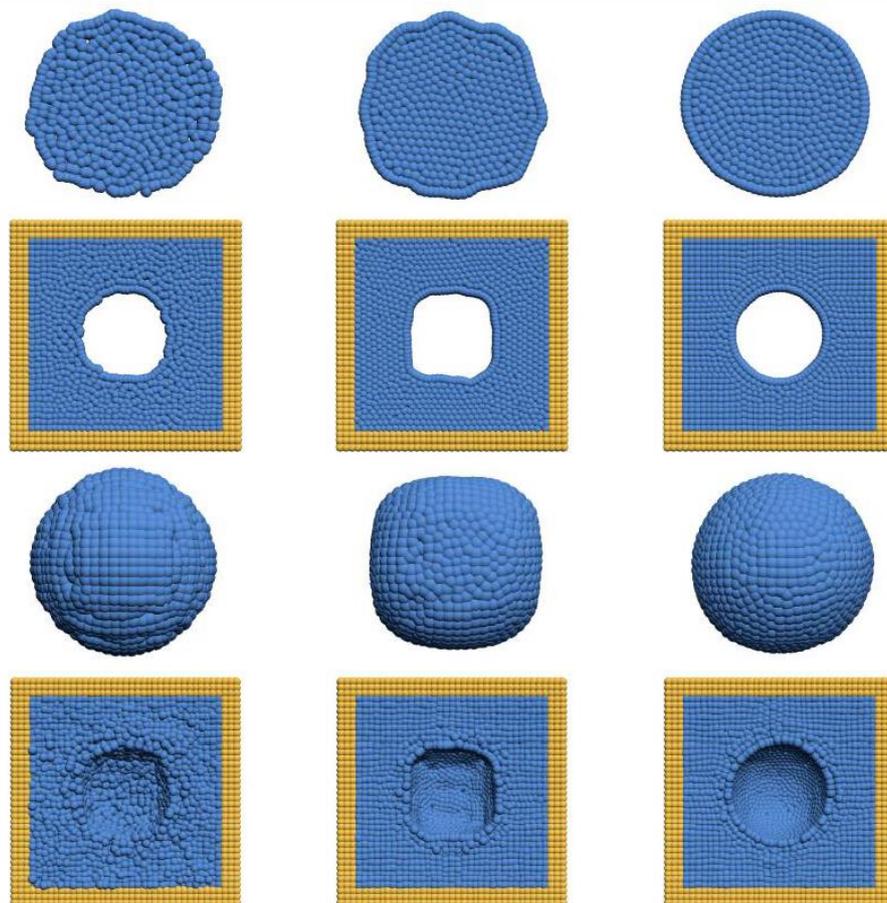


图 24 表面张力比较，从左到右依次采用的基于 CSF 的方法、IIF 方法和本文方法

### 大气压力建模

流体表面区域除了受表面张力的影响之外，同时也受到空气压力的影响，一个直观现象是由于大气压力的存在，流体在流经固体表面时会在固体附着力及大气压力的共同作用下沿着固体边界流动。为了建模这一现象，Schechter 和 Bridson[20]提出在流体自由表面外侧生成空气粒子来实现，但是生成空气粒子会消耗大量的计算开销和存储开销。为了克服这一困难，本文提出采用虚拟空气粒子的方法来建模大气压力对流体的影响。

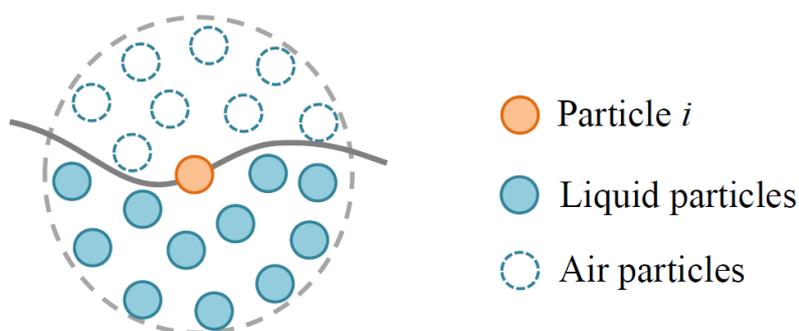


图 25 虚拟大气粒子分布示意图

图 25 展示了流体外空气区域的虚拟粒子,注意这些空气粒子在仿真的过程并不存在,我们实际是将它们对流体粒子的作用进行了转换,从而使得实际仿真过程中并不需要真正去创建这些虚拟粒子。下面我们讨论具体的转换过程,设  $p_{atm}$  表示大气压强,根据 SPH 理论我们可以得出空气粒子对粒子  $i$  的作用力如下

$$\mathbf{F}_i^a = -V_i p_{atm} \sum_k V_k \nabla_i W_{ik}^h \quad (99)$$

而我们已知,当粒子填满整个粒子  $i$  的邻域时,我们有如下关系式

$$\sum_j V_j \nabla_i W_{ij}^h + \sum_k V_k \nabla_i W_{ik}^h = \nabla \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (100)$$

其中第一项表示内部流体粒子对粒子  $i$  的作用,而第二项则表示空气粒子对粒子  $i$  的作用。利用这一关系,我们就可以将大气压力转换为以下的形式

$$\mathbf{F}_i^a = V_i p_{atm} \sum_j V_j \nabla_i W_{ij}^h \quad (101)$$

从转换之后的形式我们可以看出,我们在计算过程中并没有空气粒子参与,所有计算依然是在原始的流体粒子上完成,这样的好处是在不降低仿真精度的前提下可以节省创建空气粒子的计算和存储开销。图 26 是本文方法与[20]的对比,我们几乎看不出有何差异,但是我们通过比较两者的效率方法,本文方法的额外计算开销非常小,且不会随着仿真的进行而产生剧烈波动。



图 26 本文方法与[20]的动态效果比较

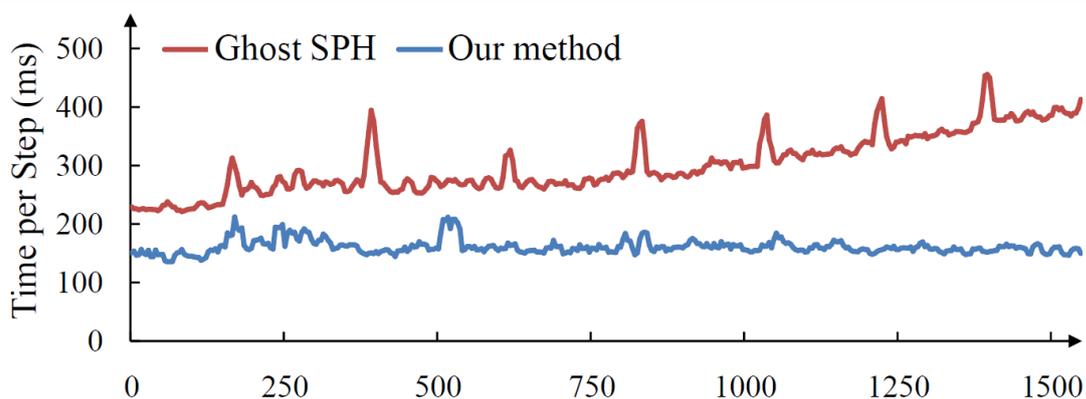


图 27 本文方法与[20]的效率比较

下面我们通过实验来展示本文方法在模拟表面张力上的优越性。图 28 不同表面张力系数条件下的 Plateau-Rayleigh 不稳定性。图 29 模拟不同组合表面力作用下的所取得的不用仿真效果。最后，图 30 展示了我们的方法在建模精细流体细节特征上的优势。

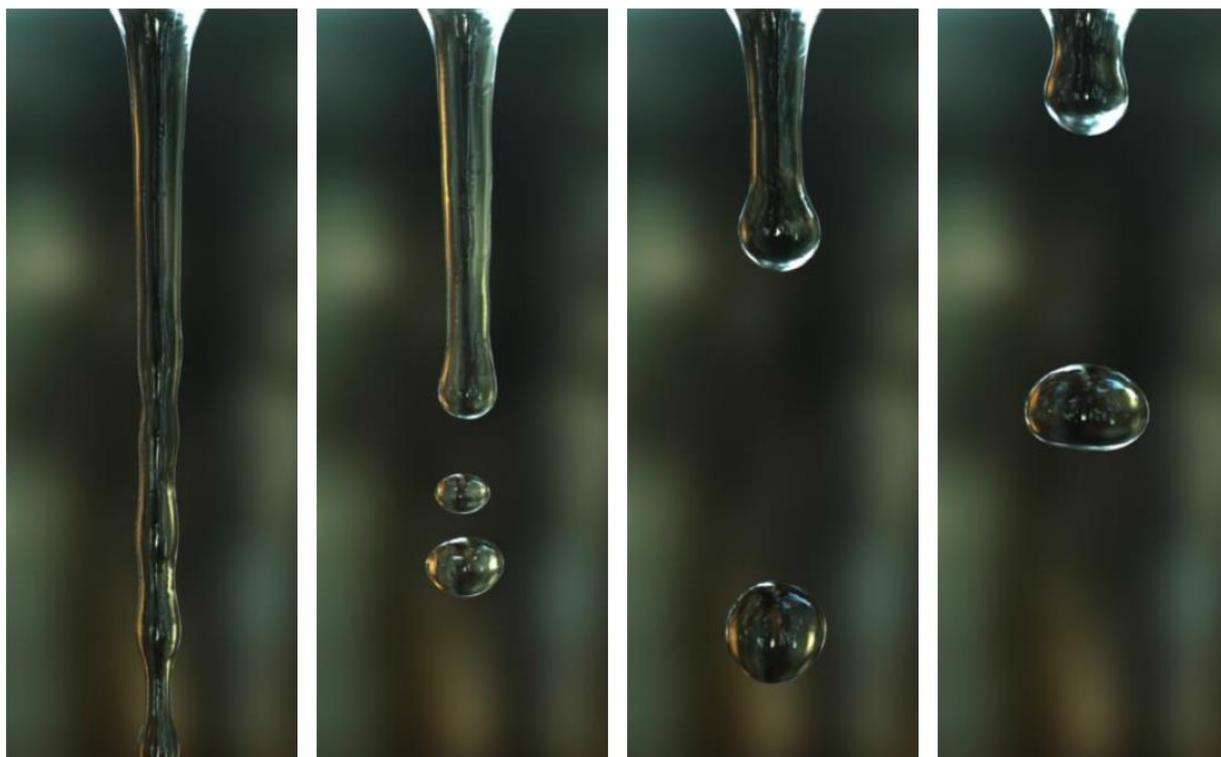


图 28 Plateau-Rayleigh 不稳定性效果模拟。



图 29 不同表面力组合所展示的效果。(左)只施加表面张力的效果;(中)只施加大气压强力的效果;(右)同时施加表面张力和大气压强力的效果。

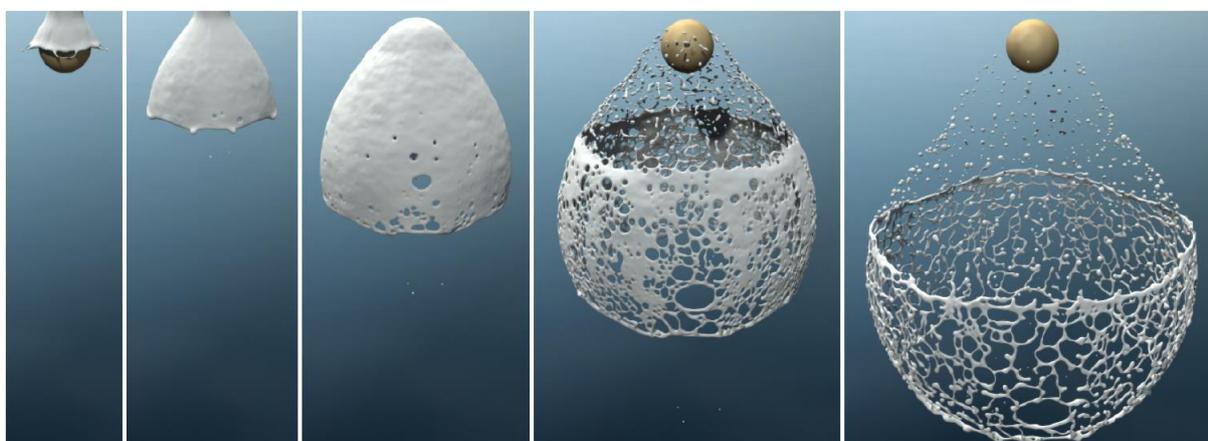


图 30 本文方法在产生精细流体细节方面的能力。

## 4.5 流体表面波

接下来我们考虑表面张力波的模拟。我们知道真实世界中的表面张力只在流体表面上传播，因而通常的做法是需要先提取流体的表面，然后在流体表面求解波动方程。但是，由于基于 SPH 的流体模拟并不存在流体表面，因此我们无法通过在流体表面求解波动方程来模拟表面波。为了克服这一困难，本文通过压力波来近似模拟表面张力，整个算法流程如图 31 所示

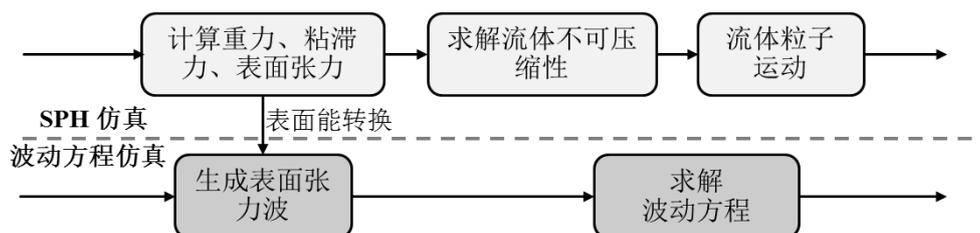


图 31 表面波模拟流程图

从图上可以看出，整个仿真分为两部分：第一部分为基于 SPH 方法的流体模拟，主要用于求解流体的不可压缩性以及产生正确的表面张力效果；第二部分则是表面波的模拟，而这两部分的联系则是通过表面能的转换来进行。也就是说当流体表面能足够大时，就会产生波动方程的源。下面我们分别讨论波动方程源的产生方式以及波动方程如何求解。

首先我们讨论如何对表面波的过程进行建模。由于我们在求解波动方程的过程中并不移动粒子的位置，也就是说，波的产生实际是由于粒子相对于中心点位置的震动而引起的。因此，我们拟采用声波的扩散模型来近似模拟流体表面波。假设  $\hat{\rho}$  表示声波的波动密度且其值的改变只能通过声波的压缩和扩展而引起，因而其运动控制方程可以表述为如下的形式：

$$\frac{D^2 \hat{\rho}}{Dt^2} = c_0^2 \nabla^2 \hat{\rho} \quad (102)$$

其中  $c_0$  表示声速。尽管从波动理论上来说，声波和流体表面张力波本质上都是由于震动引起的，因而存在相似之处。但是这两者存在本质的差别，首先声波的传播是在三维体内进行的，而表面张力的波则只在流体表面进行，因而如果我们直接用公式 102 来模拟表面张力波的话会产生不自然的效果。当然，我们也可以通过检测表面粒子，然后只在表面粒子上求解波动方程。但是，我们知道 SPH 中表面粒子的检测并不精确，所以很容易由于表面粒子检测的偏差而引入噪声。为了克服这一问题，我们引入如下的平滑操作来降低波扩散过程中的噪声

$$\frac{D \hat{\rho}(\mathbf{x}_i)}{Dt} = (v_{\max} + b_i(v_{\min} - v_{\max})) \nabla^2 \hat{\rho}(\mathbf{x}_i) \quad (103)$$

其中  $v_{\max}$  和  $v_{\min}$  为两个正系数，用于控制平滑操作的强度， $b_i$  用于指示粒子是否处于流体边界处，其具体定义如下

$$b_i = \begin{cases} 0, & \|\nabla \rho(\mathbf{x}_i)\|^2 < B_0 \text{ and } \rho_i > B_1, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (104)$$

$B_0$  和  $B_1$  为两个常量， $\nabla \rho(\mathbf{x}_i)$  的计算方式同上一节计算  $c$  的梯度。直观来说，当粒子处于流体边界时，我们施加幅度较小的平滑操作；而当粒子处于流体内部时，我们将施加较大幅度的平滑操作，从而使表面波的传递尽可能只在流体表面进行。图 32 展示采用了这一策略之后的效果

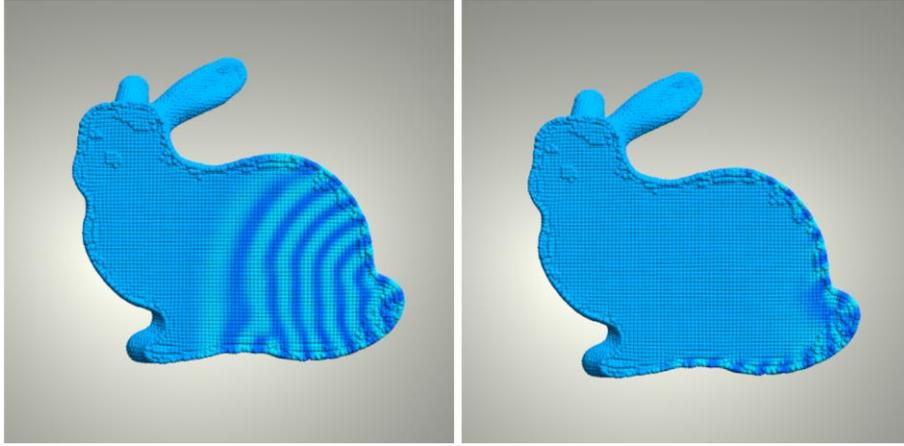


图 32 波在 Stanford Bunny 模型的传递。(左) 未进行平滑操作的效果；(右) 进行平滑操作之后的效果。

下面我们讨论如何求解公式 102 的波动方程。由于其属于二阶偏微分方程，因此我们引入一个额外的物理量  $\dot{\rho}$  用于表示波动密度的变化率。根据隐式 Newmark- $\beta$  方法，我们可以将其离散为如下的形式

$$\hat{\rho}_i^{t+1} = \hat{\rho}_i^t + \Delta t \dot{\hat{\rho}}_i^t + C_i (\nabla^2 \hat{\rho}_i^t + \nabla^2 \hat{\rho}_i^{t+1}) \quad (105)$$

其中  $\Delta t$  表示时间步长， $C_i = \frac{1}{4} \Delta t^2 c_0^2 + \frac{1}{2} \Delta t (v_{\max} + b_i (v_{\min} - v_{\max}))$ 。

对于其中的拉普拉斯算子，我们可以利用[86]的方法将其离散为

$$C_i \nabla^2 \hat{\rho}_i = \sum_j 4m_j \frac{C_i + C_j}{(\rho_i + \rho_j)^2} (\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_i) W'_{ij} \quad (106)$$

其中  $m_j$  表示邻域粒子的质量， $W' = \partial W / \partial d$ 。此外我们假设每个粒子的质量都相等，因而可以保证最后的线性方程组的系数矩阵是对称且正定的。当求得  $\hat{\rho}$  之后，我们可以按照以下公式对  $\dot{\hat{\rho}}$  的值进行更新

$$\dot{\hat{\rho}}_i^{t+1} = \frac{2}{\Delta t} (\hat{\rho}_i^{t+1} - \hat{\rho}_i^t) - \dot{\hat{\rho}}_i^t. \quad (107)$$

### 波源生成

确定了波动的运动方程之后，我们就需要根据流体的运动形态来决定哪些区域应该生成流体表面波。在传统模型中，我们知道表面张力波产生的区域一般为流体表面曲率较大的区域，而根据前面流体自由表面能的讨论，自由表面能一定程度上反映了表面的曲率，因此我们可以根据每个粒子自由表面能的大小来决定生成表面张力波的区域。我们先计算粒子  $i$  存储的自由表面能

$$e_{s,i} = \frac{1}{2} \kappa m_i \|\nabla \rho(\mathbf{x}_i)\|^2 \quad (108)$$

当流体从  $t$  时刻运动到  $t+\Delta t$  时刻时，粒子  $i$  自由能改变量为  $\Delta e_{s,i} = e_{s,i}^{t+1} - e_{s,i}^t$ 。而根据能量守恒定理，我们假设粒子  $i$  自由能改变应该相应的引起自由表面波的变化。基于这一假设以及内能与压强的关系式  $\hat{p} = c_0^2 \hat{\rho}$  和  $\Delta \hat{\rho}_i = -\Delta e_{s,i}$ ，当流体自由表面能发生改变时，我们可以按照以下公式对波动密度进行更新

$$\hat{\rho}_i^{new} = \hat{\rho}_i^t + \frac{1}{2} \Delta t^2 c_0^2 \nabla^2 \left( \hat{\rho}_i^t - \frac{1}{c_0^2} \Delta e_{s,i} \right) \quad (109)$$

这里注意我们并没有直接利用  $\Delta e_{s,i}$  去改变波动密度，而是通过求解拉普拉斯方程来实现，这么做的好处是可以保证总质量的守恒。

图 33 展示了叠加了表面张力波之后的效果，我们可以看出本文方法又可以有效的模拟自由表面波的产生和扩散过程。

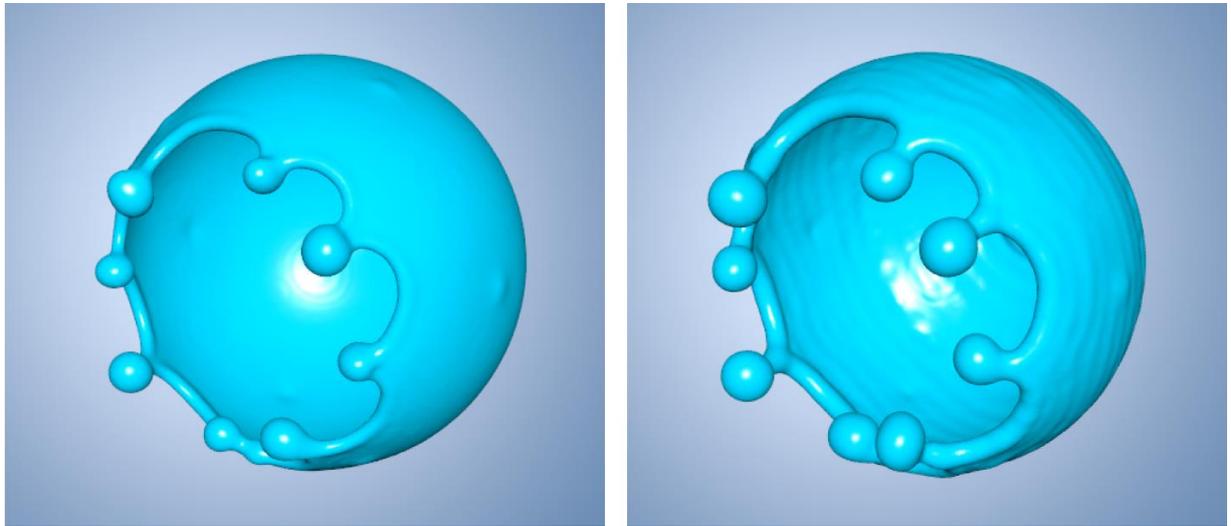


图 33 表面波叠加前后效果对比

图 34 则模拟了水滴溅起皇冠形态时的表面张力波的形态及扩散过程，通过和真实照片的对照，我们可以发现本文方法模拟和真实照片中波的效果非常相似。

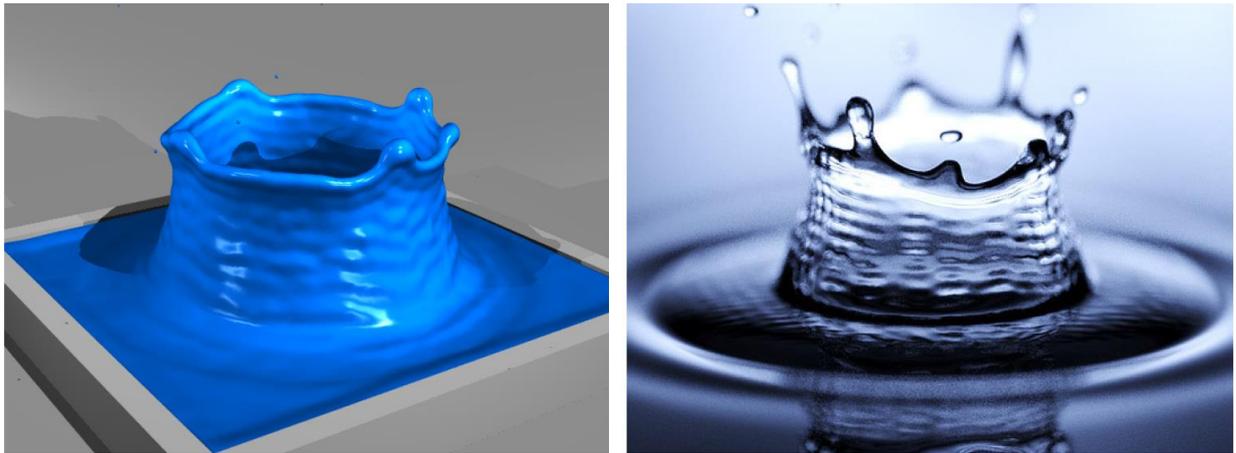


图 34 本文仿真结果与真实照片的效果对比

#### 4.6 多相流边界控制

此外，非局部作用思想可直接用于对多相流的边界进行控制，从而实现可溶和不可溶流体的统一仿真模拟[38]。如下图分别展示可溶和不可溶的流体模拟。



图 35 通过直接边界控制实现的多种流体相容情况

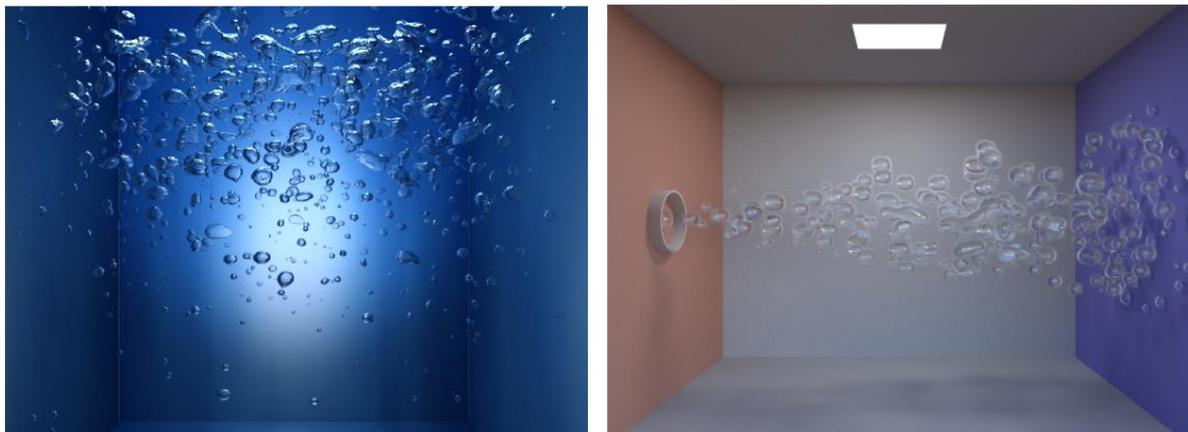


图 36 水下气泡仿真及气体预冷凝结相变过程模拟

## 4.7 本章小结

本章主要研究了非局部作用机理在流体仿真中的应用。为了解决长期以来一直困扰传统 SPH 方法的拉伸不稳定性以及边界粒子缺失等问题，我们首先利用变分法对流体的不可压缩性问题进行了重新定义，从而使我们可以将其转化为最优化问题进行求解。同时我们提出半分析法用于解决边界粒子缺失的问题，从而保证在不增加计算开销的前提下增加仿真的计算精度。接下来，我们针对自由表面流中表面张力计算不稳定精度差的问题，利用 Helmholtz 自由能提出了一种新的表面张力模型，保证即使在稀疏采样的前提下依然可以得到稳定可靠的表面张力计算结果。最为，为了增强表面细节，我们利用声波近似模拟了表面张力波的生成和传播的过程。

## 第五章 非局部作用机理在弹塑性材料仿真中的应用

### 5.1 引言

我们知道弹塑性材料无处不在，且能表现出相当复杂的行为。如果仅仅是在一维空间中动态建模弹塑性材料的弹性和塑性行为相对来说还比较简单直观。然而，如果我们将仿真扩展到更高维度空间，材料的变形和塑性屈服将由于材料刚度和几何拓扑的多样性变得相当复杂。如何找到一个可以自然处理任意维度空间下材料的弹塑性行为一直是计算机图形学中研究的重点和难点。尽管研究人员已经广泛研究了各种不同变形体的模拟方法和工具，目前方法在统一建模不同维度的弹塑性材料上仍然具有很大的局限性。

首先，基于结构化粒子的方法在处理拓扑变化方面非常有效，但是其在弹塑性材料的模拟中的依然存在许多局限。目前，基于非结构化粒子进行弹塑性材料模拟的工作主要基于广义移动最小二乘法（GMLS）[87, 88]，SPH 方法[89]以及局部 Petrov-Galerkin 方法[90, 91]。由于这些无网格方法都是基于经典弹性理论中的微分方程，因而仿真结果可能对底层粒子的分布非常敏感，从而造成仿真结果不稳定。此外，这类方法的不足主要是无法计算非连续边界处的偏导数，从而无法建模设计碎裂的材料。克服这些困难的一个可能的解决方案是应用基于位置的方法[48, 92]，这类方法的核心思想是通过直接对粒子的位置进行约束来近似的建模弹性材料的形变行为。这种方法的优点在于效率高且算法稳定，不足在于由于它是直接基于位置约束，因而丢失了很多物理信息，因而不能产生许多有趣的弹性材料行为，比较典型的如泊松效应。

近来，随着非局部作用机理研究的深入，越来越多的研究人员开始意识到非局部作用机理在解决非线性问题上的优势。其中近场动力学（Peridynamics）作为一种典型的非局部作用方法，已经在无网格方法中得到普及且成功用于建模不连续形变问题，如断裂[93]。近场动力学在最初提出来的时候主要基于键力模型[94]，即假设相邻两个粒子质点之间的力仅仅依赖与这两个质点。不过，Silling 很快发现这样的假设无法真实的建模很多材料，比如具有不同泊松系数的材料。因此 Silling 和同事[67]对模型进行了扩展，并引入了态的概念，从而使得粒子对之间的受力不仅与这两个粒子相关，同时也与粒子邻域内的其他粒子也相关。这一拓展使得近场动力学可以有效模拟基于键力模型无法建模的材料。然后其在建模弹塑性材料的时候对时间步长有限制。当时间步长太大的时候常

常会导致仿真的不稳定。为了克服这一不足，本文基于近场动力学和投影技术提出了一个快速、稳定的基于态的无网格动力学框架用于统一建模多种弹塑性材料。由于近场动力学在建模过程中使用积分方程而不是微分方程构建其动态方程，该属性允许我们设计一种特定的本构模型，从而使得我们可以采用稳定的隐式投影技术来求解动力学方程。研究过程中，本章的主要技术贡献包括以下几个方面：

(1) 我们提出了一种隐式积分迭代方法用于高效求解新的本构模型，这种方法不仅可以处理大块体的材料，还可以不经修改的处理薄壳和绳索等低维度特征材料。

(2) 我们基于近场动力学提出一种新的建模塑性形变的方法。为了消除低维度材料形变张量的奇异性，我们通过直接修改初始形状的位置来反应材料的塑性形变，从而保证即使出现退化的情况也依然能正确处理材料的塑性形变。

(3) 我们对本构模型进行了一定的拓展，过采用基于位置的方法来求解流体的不可压缩性以及根据材料的粒子分布动态调整材料的强度，使得我们的方法可以很容易的建模颗粒材料以及粘弹性流体。

实验结果表明我们的方法可以真实地模拟包含弹塑性提、壳、杆、粘弹性流体以及颗粒流在内的材料。另外由于本文方法可以在统一框架下建模多种不同的材料，因而也非常适合模拟材料为外界条件变化而引起的相变。此外，由于我们采用了隐式的投影求解技术，求解器可以有效地处理大形变和大时间步长，比如我们可以将时间步长设定  $1/30s$ ，却依然得到稳定的仿真结果。最后，本文提出的方法具有高并行性，因而也非常用 GPU 对其进行加速。

## 5.2 相关研究工作

在图形领域，对于弹塑性材料的模拟一直以来都是重点，因此一直以来都有研究人员试图用不同的方法进行研究，期望找到一种既方便又有效的方法。目前主流的方法大致可以分为两类，一类是网格法，其代表为有限元方法；另一类则是无网格方法，包括光滑粒子动力学 (SPH) 方法、质点网格法 (Particle in Cell) 以及基于位置的方法 (Position-Based Method)，下面重点介绍无网格方法在建模弹塑性材料方法的研究进展。

### 光滑粒子动力学方法 (SPH)

尽管 SPH 方法初期主要用于对流体进行建模，但是随着 SPH 方法的发展，已经有越

来越多的研究人员将 SPH 的应用拓展到建模弹塑性材料上。早期 Desbrun 和 Gascuel[7]就提出了利用 SPH 技术进行形变体的模拟。后来 Pavia 和他的同事[95]使用 SPH 对非牛顿流体进行了模拟,如熔化现象。Solenthaler 和合作者[89]开发了一种利用 SPH 方法统一模拟流体和变形体的方法。随后,为了解决旋转不变性的问题,Becker 和他的同事们[56]提出了一种让初始形状随形变一起运动的弹性形变模拟方法,从而有效克服传统小形变模拟无法处理旋转的问题。Gerszewski 和合作者[96]则对该 SPH 方法又做了进一步的拓展,从而可以用来模拟弹塑性材料。Alduán 和 Otaduy[97]则通过使用预测校正方法实现了颗粒材料中摩擦力和内聚力的计算,从而可以一定程度上模拟沙粒的运动特性。最近, Jones 和他的合作者[98]引入了一种通过嵌入式形变张量的方法用于模拟弹塑性形变,取得了不错的效果,但是不足在于他们的方法无法处理低维度的几何特征,如布料。

### 质点网格法

质点网格(PIC)方法存在很多的变型,图形学领域内用的比较多的包括物质点方法(MPM)[64],流体隐式粒子(FLIP)方法[36]和仿射粒子单元法[99],实验证明该类方法非常适合建模颗粒状的材料,如沙和雪。另外,研究人员还致力于用这些方法对其他一些仿真现象进行模拟,主要包括熔化和固化过程的模拟[100]、基于非线性模拟的牛顿粘弹性材料[101]、颗粒材料[65]和粘弹性流体、泡沫和海绵[65]等。其中,MPM 在模拟弹塑性材料的时候有效,并且与本文采用的方法也有一定的相似之处。不同在于 MPM 在计算涉及偏导数的物理量时都是通过在背景网格上计算生成的,比如形变梯度,而我们的方法则是纯粹的拉格朗日方法,即所有相的计算都是在粒子上完成的。这一差别使得 MPM 方法适用于建模大块体的弹塑性材料,却不太适合模拟具有多维度特征的材料。据我们所知,如何模拟主要薄壳体状材料一直以来都是 MPM 方法的难点。此外,MPM 也不适用于处理极端大形变,比如将兔子完全压扁之后的恢复过程。一种补救方法是通过将拉格朗日框架整合进入 MPM 中,也就是在粒子层面做额外处理[102, 103],然而整个实现过程相对麻烦。而本文提出的基于非局部作用机理的方法可以统一处理任意维度的材料,也可以处理极端大形变和保证大时间步长下的稳定性。

### 基于位置的方法

基于位置的方法(PBD)不同于传统的基于力的方法,也就是说它在计算过程中并不对受力情况进行计算,而是直接通过几何约束来模拟材料的弹塑性行为。这一特性使

得 PBD 方法的稳定性非常好, 保证基于弹簧[48]和四面体网格[92]的方法即使在大时间步长下依然能够稳定运行。随后, Macklin 和 Müller[15]对 PBD 方法进行了扩展, 从而使得 PBD 也可以基于非结构化的粒子来模拟不可压缩的流体。基于这些技术, Macklin 和同事们[104]通过同时使用结构化粒子和非结构化粒子构建了一个基于 GPU 的统一仿真框架, 用于有效模拟多种材料之间的交互作用。但是 PBD 方法的一个明显不足在于其求解器所需的迭代步数与积分采用的时间步长息息相关。为了克服这一难点, Bouaziz 和合作者[53]将弹塑性材料的控制方程转化为其对应的能量方程, 然后可以基于能量最小原理来求解一个二次项形式的方程。这样我们就可以将约束问题分解为包含非线性项和线性项的两部分, 对于其中的非线性项, 其具有高并行性, 因而可以完全利用 GPU 对其进行加速, 而其中的线性项由于系数矩阵是固定的, 因而我们可以在预计算的时候就完成对系数矩阵的分解, 从而极大的提高求解的效率。

### 5.3 弹性材料建模

在弹塑性材料的建模中, 其最终的部分就是本构关系的建立。在这一节, 我们将设计一个新的二次能量密度函数用于构建应力和应变之间的本构关系。该本构模型由于采用的是基于非局部作用的思想, 因而摒弃了传统模型中处理大形变时对旋转矩阵的依赖。同时, 新的本构模型允许我们通过采用投影的方法来隐式的求解动力学方程[53, 55, 105], 保证了仿真算法的稳定性。

我们首先回顾连续介质力学理论中关于能量密度的一种典型形式, 其定义如下

$$\Psi = \mu \|\mathbf{F}_E - \mathbf{R}_E\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} (J_E - 1)^2, \quad (110)$$

其中  $\mathbf{F}_E$  表示形变梯度张量,  $\mathbf{R}_E$  表示旋转矩阵,  $J_E = \det \mathbf{F}_E$  表示二阶张量的第三不变量,  $\lambda, \mu$  表示 Lamé 系数。在模拟诸如雪这样的颗粒材料时,  $\lambda, \mu$  的值通常可以表示成关于  $\mathbf{F}_E$  的函数。我们知道, 上述关于能量的定义可以有效的建模大块体的弹塑性材料。但是, 它却存在几个不足。其一是当发生极端大形变时, 我们需要通过采用诸如奇异值分解这样的特殊处理来避免产生形变梯度退化的问题。其二则是该能量模型不适用于多维度特征材料的建模, 主要原因是它的形式无法反应弯曲所产生的形变能量, 因而在模拟布料的时候通常需要引入额外的结构来建模布料的弯曲形变。为了解决上述的两个问题, 我们决定基于非局部作用机理设计一种基于邻域及积分形式的本构模型。我们假设形变体

的内能并不是存储在中心点上，而是存储于相邻的点对上。另外受有限元理论的启发，我们假设某点处所有的领域点对所对应的形变梯度  $\bar{\mathbf{F}}$  是一样的，也就是说，对于领域内的任意一点，其形变之后的位置都可以表示为  $\mathbf{Y}^* = \bar{\mathbf{F}}\xi$  的形式，其示意图如图 37 所示

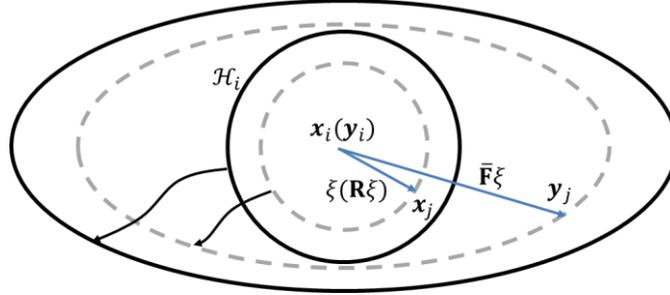


图 37 近场动力学局部形变示意图

根据近场动力学理论，公式 110 的能量密度函数则可以转化为如下的形式

$$\Psi^{dev} = \int_{\mathcal{H}} w \langle \xi \rangle \left( \mu \left\| \frac{\bar{\mathbf{F}}\xi - \mathbf{R}\xi}{|\mathbf{X}|} \right\|^2 \right) d\xi \quad (111)$$

再不引起歧义的前提下，我们将忽略了下标  $(\cdot)_E$  和  $(\cdot)_F$ 。从图 37 上我们可以看出， $\|\bar{\mathbf{F}}\xi - \mathbf{R}\xi\|$  这一项实际上衡量的是从  $\mathbf{x}_j$  到  $\mathbf{y}_j$  的距离，假设  $\mathbf{x}_i$  邻域的初始形态与当前形态已经匹配上，则  $\|\bar{\mathbf{F}}\xi - \mathbf{R}\xi\|$  的值就可以近似的表示为  $\|\bar{\mathbf{F}}\xi\| - \|\mathbf{R}\xi\|$ ，这样表示的好处是我们可以移除其中的旋转矩阵  $\mathbf{R}$ ，从而避免了额外的计算开销。根据这一发现，我们可以将公式 111 中的能量密度函数转换为如下基于积分的形式

$$\Psi = \int_{\mathcal{H}} w \langle \xi \rangle \left( \mu \underline{E}^{dev} \langle \xi \rangle + \frac{\lambda}{2} \underline{E}^{iso} \langle \xi \rangle \right) d\xi \quad (112)$$

这里包含了两部分，其中  $\underline{E}^{dev} \langle \xi \rangle$  表示的弹性能量密度的各向异性部分， $\underline{E}^{iso} \langle \xi \rangle$  则表示的是各向同性部分， $\underline{E}^{iso} \langle \xi \rangle$  采用了类似弹簧的形式。

根据已知的能量密度函数，我们就可以推导出各点出的实际受力情况。首先对于各向异性部分  $\underline{E}^{dev} \langle \xi \rangle$ ，它相对于当前位置求偏导之后得出的力的形式为

$$\underline{\mathbf{T}}^{dev} = -\mu w \frac{\partial \underline{E}^{dev}}{\partial \mathbf{y}_i} = -\frac{2\mu w}{|\mathbf{X}|^2} \left( 1 - \frac{|\mathbf{X}|}{|\mathbf{Y}^*|} \right) \mathbf{Y}^* \frac{\partial \mathbf{Y}^*}{\partial \mathbf{y}_i} \quad (113)$$

当邻域的区域较小且比较平滑时，我们可以得到  $\underline{\mathbf{Y}}^* \approx \underline{\mathbf{Y}}$ 。根据这一近似，我们可以将公式 113 进一步简化为以下的形式

$$\underline{\mathbf{T}}^{dev} \approx \frac{2\mu w}{|\underline{\mathbf{X}}|^2} (\underline{\mathbf{Y}} - |\underline{\mathbf{X}}| (\text{Dir} \underline{\mathbf{Y}}^*)) \quad (114)$$

这样表示的好处是它的计算可以分解为两部分，其中  $\text{Dir} \underline{\mathbf{Y}}^*$  对应的是非线性的部分，而  $\underline{\mathbf{Y}}$  则是对应的线性部分，因而可以形成一个线性系统统一求解。

类似，从能量密度各向同性部分也可以到处如下形式的力

$$\underline{\mathbf{T}}^{iso} = \frac{\lambda w}{|\underline{\mathbf{X}}|^2} (\underline{\mathbf{Y}} - |\underline{\mathbf{X}}| (\text{Dir} \underline{\mathbf{Y}})) \quad (115)$$

从以上公式的定义我们可以看出，公式 114 和公式 115 之间唯一的差别在于方向的选择上，即公式 114 采用的是  $\underline{\mathbf{Y}}^*$  而 115 则是采用的  $\underline{\mathbf{Y}}$  的方向。因此，直观上来讲，我们可以将  $\underline{\mathbf{T}}^{iso}$  理解为法向应力， $\underline{\mathbf{T}}^{dev}$  理解为切向应力。

### 隐式积分

基于上述应力的形式，我们可以将动量方程离散化成如下的形式

$$\rho_i (\mathbf{y}_i^{t+1} - \mathbf{y}_i^*) = h^2 \sum_j V_j (\underline{\mathbf{T}}_i^{t+1} \langle \xi \rangle - \underline{\mathbf{T}}_j^{t+1} \langle -\xi \rangle) \quad (116)$$

其中  $\mathbf{y}_i^*$  表示施加了除了弹性力以外的所有力之后得到的临时位置。隐式积分的求解我们主要分为两个步骤。第一步我们先计算积分方程的非线性部分，即根据当前的位置信息计算对应的  $\text{Dir} \underline{\mathbf{Y}}^*$  值。然后我们将该值代入公式 116，从而得到一个全局的线性方程组，并通过迭代方法对线性方程组进行求解。从求解过程中我们可以看出，本文方法并不需要通过采用奇异值分解来得提取形变的旋转矩阵，从而极大降低了每一个迭代步的计算开销。此外，如果我们只考虑弹性材料，也就是在整个仿真过程中每一点的邻域是固定的，那我们实际上可以进一步对线性方程组进行预计算，从而使得在实际迭代过程中不用采用迭代法来求解大规模线性方程。

此外，为了保证我们方法可以处理极端大形变。受有限元法的启示[106, 107]，当形变梯度  $\bar{\mathbf{F}}$  的行列式小于 0 时，说明形状已经发生反转，因此我们通过置换  $\bar{\mathbf{F}}$  的前两行来进行修正，从而使得物体能回复到原来的形状。图 38 显示了这种简单的方法如何有效的

帮助被挤压的兔子恢复到其初始的形态。

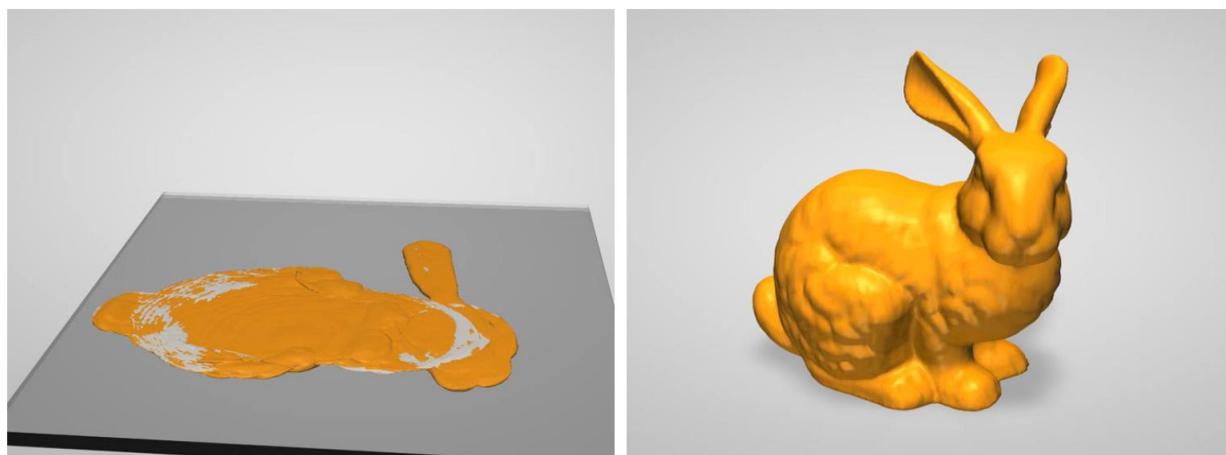


图 38 Stanford bunny 从被压扁到完全恢复的过程

另外，图 40 中，我们的方法的结果与其他方法进行了比较。实验表明基于弹簧系统 [55] 的方法虽然仿真比较稳定，但是却有可能发生形状翻转而无法恢复。基于形状匹配的方法 [108] 虽然可以处理形状翻转的问题，但是却无法正确产生泊松效应。而相比之下，我们的方法既可以保证仿真的稳定性，同时也可以产生正确的泊松现象，从而使得模拟的结果更加真实。

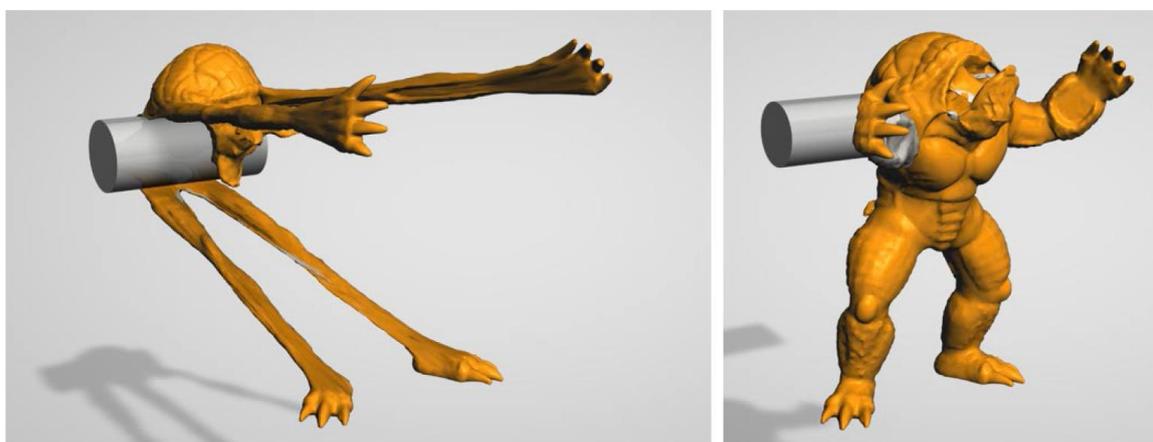


图 39 弹簧系统模拟 Armadillo 产生的弹性形变效果



图 40 Shape Matching 方法模拟 Armadillo 产生的弹性形变效果

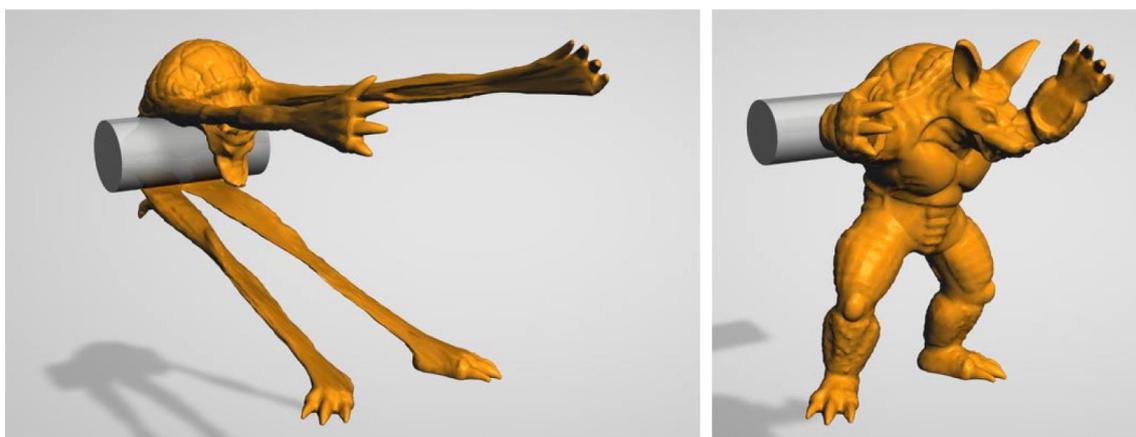


图 41 本文方法模拟 Armadillo 产生的弹性形变效果

不仅如此，我们还可以很容易对本文方法进行拓展，从而用于建模不同维度的材料，比如我们可以通过调节  $\mu$  的大小来模拟具有不同弯曲程度的布料，作为图 42 所示。

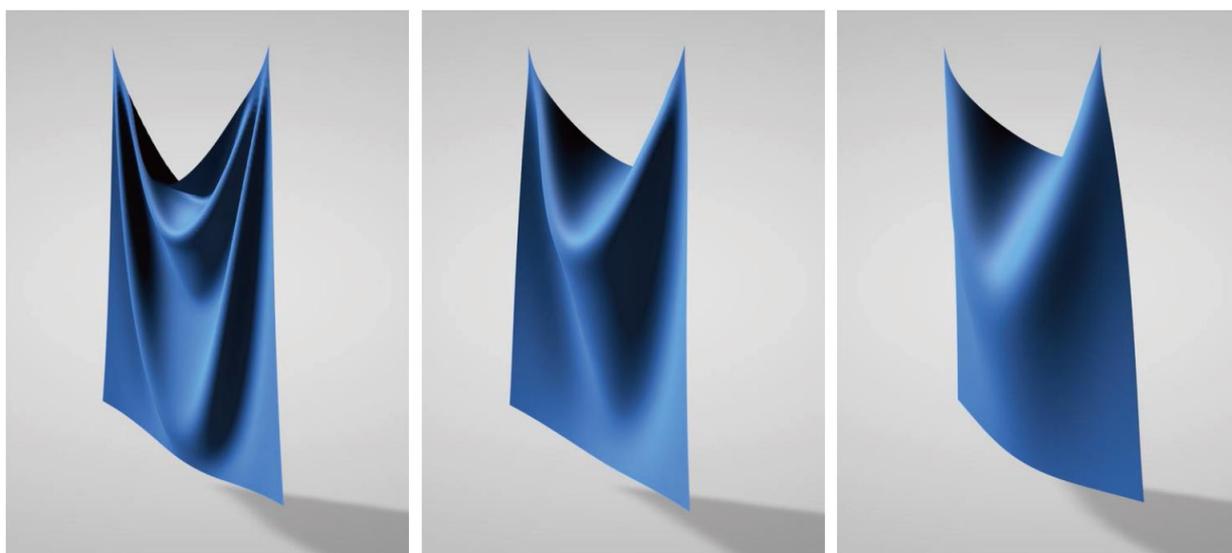


图 42 本文方法可以模拟不同弯曲程度下的布料

但是这里必须指出，如果我们仅仅采用一排粒子的话并无法建模扭转的效果。我们

的解决方案是通过引入两排虚拟的粒子来实践，如图 43 所示。虚拟粒子与原始粒子在受力上的处理方式完全一致，唯一不一样的地方在于虚拟粒子并不参与碰撞检测的处理。当然这么处理的不足在于我们对弯曲和扭转的效果进行独立控制，所以当我们修改  $\lambda$  或者  $\mu$  时，弯曲和扭转的效果会一起发生改变。

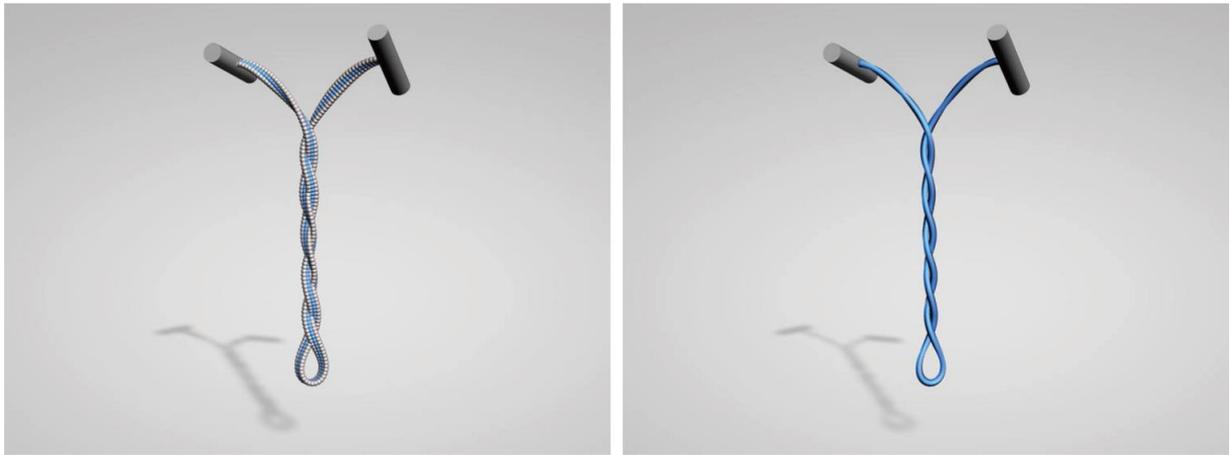


图 43 本文方法模拟绳子扭曲的效果。(左) 粒子视图；(右) 网格视图。

最后，我们将对隐式求解算法的收敛性进行分析。假设我们已知所采用的弹性模型，那么现在问题是如何求解全局的线性方程组，以及求解线性方程组每一个迭代步的计算开销是多少？基于以往对投射方法的研究，这里我们在单核 CPU 上测试了三种不同的策略。第一种方法通过利用 Cholesky 因式分解对系数矩阵进行直接分解[53]，第二种方法则是利用 Jacobi 迭代方法进行求解，第三种方法则是采用结合 Jacobi 迭代与 Chebyshev 加速的方法来实现[105]。此外为了完整性，我们还进一步评估直接基于位置进行求解的效率，也就是我们利用公式 116 预测得到的所有邻域粒子的位置进行加权平均去更新粒子位置。比较误差的定义则通过计算非线性系统的残差来得到。图 44 表明在 CPU 上测试时，方法一在收敛性上可以取得最好的效果。但是，我们知道对于塑性材料或流体的模拟，由于其邻域在不断发生变化，因而无法通过预计算的方式事先就对系数矩阵进行分解。所以对于这些材料就需要借助后两种方法。从测试中我们可以看出，Jacobi + Chebyshev 方法应该优于其他方法。所以我们选择它作为我们的弹性材料模拟中全局线性方程组的默认求解算法。

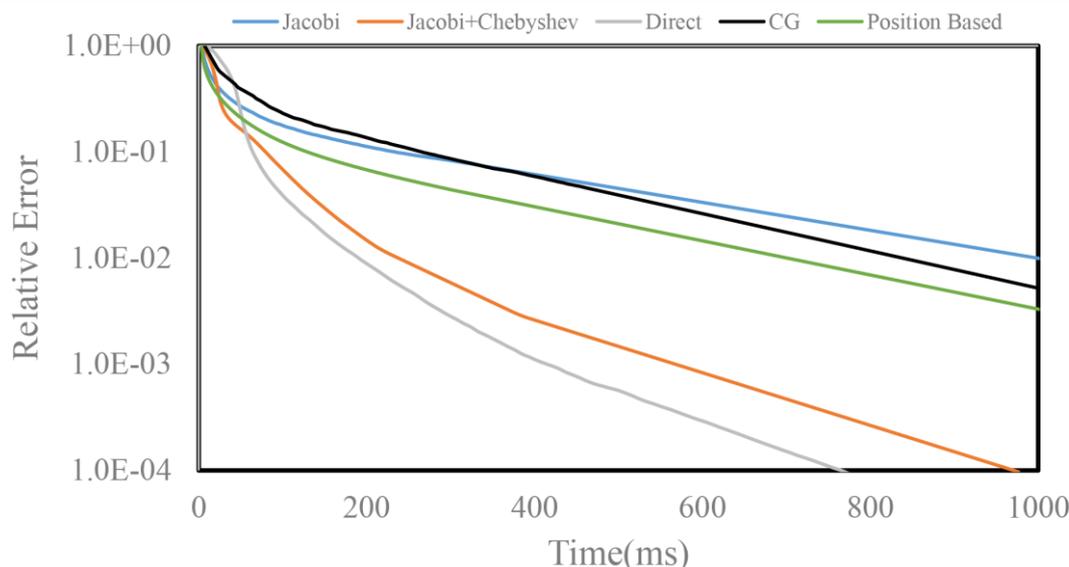


图 44 不同方法收敛性比较

## 5.4 塑性材料建模

接下来我们研究如何用基于非局部作用机理对塑性材料进行建模。我们已知现有的方法[64, 109]在建模塑性材料时的一般策略是通过将形变梯度分解成塑性部分和弹性部分的乘积，然后根据形变的情况随时更新相应的塑性张量。这种方法的不足在于当极端形变发生时，塑性形变张量的形式可以并不唯一，从而导致仿真结果的不确定性[98]。此外，它与本文之前采用的基于非局部作用的弹性模型也并不符。主要原因在于本文中的弹性模型采用的是积分形式，而传统塑性模型用的是微分形式。为了解决这一矛盾，我们的想法是当物体发生塑性形变时，我们直接更新邻域内所有粒子的初始位置，相当于将塑性张量改变的量直接反应到初始形状中。假设  $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{Y}} - \overline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{X}}$  表示物体在消除旋转影响之后的位移态，我们首先将其分解为两部分  $\underline{\mathbf{D}}_e$  和  $\underline{\mathbf{D}}_p$ ，即  $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}_e + \underline{\mathbf{D}}_p$ ， $\underline{\mathbf{D}}_e$  表示弹性位移部分，而  $\underline{\mathbf{D}}_p$  则表示塑性位移部分，当延展发生时，我们将用  $\underline{\mathbf{D}}_p$  直接更新形状的初始状态，即  $\underline{\mathbf{X}} \leftarrow \overline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{D}}_p$ 。接下来我们将重点考察延展发生的条件。

本文选择采用 Drucker-Prager 条件作为塑性形变发生延展的条件，即

$$\sqrt{J_2} \leq A + BI_1 \quad (117)$$

$I_1$  为应力张量的第一不变量， $J_2$  则表示偏应力张量的第二不变量， $A$ 、 $B$  作为控制系数一般可以表示为如下的形式

$$A = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}, \quad B = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (118)$$

其中  $c$  表示内聚力系数， $\phi$  则表示摩擦角。接下来我们讨论如果利用该延展条件对发生塑性形变之后的初始形状进行更新。

设  $\underline{e} = |\underline{\mathbf{Y}}|/|\underline{\mathbf{X}}| - 1$  表示相邻两个质点形变之后的伸长比，则我们可以将它分解为如下两部分

$$\underline{e}^{iso} = \int_{\mathcal{H}} \underline{w}(\underline{\xi}) \underline{e}(\underline{\xi}) d\underline{\xi}, \quad \underline{e}^{dev} = \underline{e} - \underline{e}^{iso} \quad (119)$$

其中  $\underline{e}^{iso}$  表示各向同性的形变部分， $\underline{e}^{dev}$  则表示非各向同性部分的形变。基于这一分解，

$I_1$  和  $J_2$  的值就可以通过以下的公式进行加计算

$$I_1 = -\lambda \underline{e}^{iso}, \quad J_2 = \mu \int_{\mathcal{H}} \underline{e}^{dev}(\underline{\xi}) \underline{e}^{dev}(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad (120)$$

然后我们就可以通过公式 117 中的条件判断材料是否发生延展，当延展发生时，我们就需要对初始形状进行更新。更新过程中，我们需要首先计算如下两个参数  $\alpha, \beta$  分别表示的各向同性位移以及各向异性位移部分发生塑性形变的程度，也就是说总的塑性位移量可以表示为  $\underline{\mathbf{D}}_p = \alpha \underline{\mathbf{D}}^{iso} + \beta \underline{\mathbf{D}}^{dev}$ ，其中  $\underline{\mathbf{D}}^{iso}$  和  $\underline{\mathbf{D}}^{dev}$  表示的总位移态的各向同性部分和各向异性部分，其计算方式如下

$$\underline{\mathbf{D}}^{iso} = \int_{\mathcal{H}} \underline{w}(\underline{\xi}) \underline{\mathbf{D}}(\underline{\xi}) d\underline{\xi}, \quad \underline{\mathbf{D}}^{dev} = \underline{\mathbf{D}} - \underline{\mathbf{D}}^{iso}. \quad (121)$$

从公式 121 中我们可以看出  $\alpha, \beta$  的取值范围为  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ，所以说塑性形变  $\underline{\mathbf{D}}_p$  的量不可能超过总形变  $\underline{\mathbf{D}}$  的量。当  $\sqrt{J_2} = A + BI_1$  时，延展条件刚成立，此时  $\alpha$  和  $\beta$  的值都应该是 0。

此外我们假设当  $A + BI_1 > 0$  时，塑性形变只发生在各向异性部分，即  $\alpha = 0$ ；而当

$A + BI_1 < 0$ ，无论施加什么力延展条件都将成立，而  $\beta$  并不能取负值。基于所有这些假

设，我们可以得到  $\alpha$  和  $\beta$  的计算方式如下

$$\{\alpha, \beta\} = \begin{cases} \left\{ 0, \frac{\sqrt{J_2} - A - BI_1}{\sqrt{J_2}} \right\}, & \text{if } A + BI_1 > 0, \\ \left\{ \frac{A + BI_1}{BI_1}, 1 \right\}, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (122)$$

图 45 展示了我们的塑性模型在处理兔子模型碰撞之后发生塑性形变的有效性。

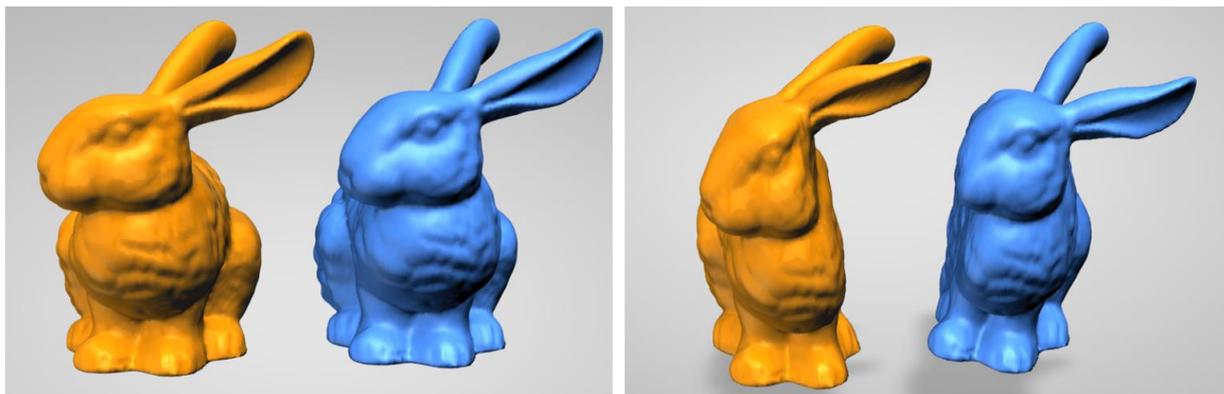


图 45 兔子碰撞过程中产生的塑性形变

## 5.5 均质粘弹性流体建模

本章方法也可以通过一定扩展用来模拟均质的粘弹性流体，如图 46 对蜂蜜的模拟。而拓展的关键主要包含两部分，一部分主要针对均质流体的特性对仿真粒子进行重新的排列，从而使得粒子的分布更加均匀；另一部分则是处理邻域的变化。



图 46 本文方法对粘弹性流体的仿真

在保证粒子分布的均匀性方面，一种可能的方案是在每个仿真开始之前就对粒子分布进行重新采样[110]。然而，这种方案在如何保证粒子重新分布之后保持质量守恒是一个比较难以克服的问题。在 SPH 方法中，研究人员[16, 111]指出粒子的均匀分布可以通过最小化  $\|\nabla\rho\|^2$  来实现。基于这一理论，我们提出一种基于位置约束的方法来最大程度的保证粒子分布的均匀性。首先，我们为每一个粒子引入一个如下约束：

$$C_i = \|\nabla_i \rho\|^2 = 0 \quad (123)$$

我们的任务就是使得这一约束在每一点上都尽可能成立。其中的梯度我们用 SPH 方法对其进行离散，即  $\nabla_i \rho = m \sum_j \nabla_i W_{ij}$ ，形函数采用 Spiky 函数[8]。基于[15]，我们就可以推导出每一个迭代步移动的距离如下

$$\tau_i = \frac{C_i}{\sum_l \|\nabla_l C_i\|^2 + \varepsilon} \quad (124)$$

其中  $\varepsilon$  是一个松弛数，主要用于保证除数是 0 的情况下程序的稳定性。 $\nabla_l C_i$  则可以表示为如下形式

$$\nabla_l C_i = \begin{cases} \nabla_i \nabla_i \rho \cdot \nabla_i \rho, & \text{if } l = i, \\ -\nabla_j \nabla_i \rho \cdot \nabla_i \rho, & \text{if } l = j, \end{cases} \quad (125)$$

最后当我们已经计算了每一个粒子的更新距离  $\tau_i$  之后，我们就可以通过采用以下公式更新每一个粒子的位置

$$\mathbf{y}_i \leftarrow \mathbf{y}_i + \delta \sum_j \frac{\tau_i + \tau_j}{2} \nabla_i W_{ij} \quad (126)$$

其中  $\delta$  我们会取 0~1 之间的常数。图 47 显示了不同的  $\delta$  对粘弹性流体运动特性的影响。当我们选取较大的  $\delta$ ，通过粒子重分布的方式可以更有效的保留精细的流体细节特征。

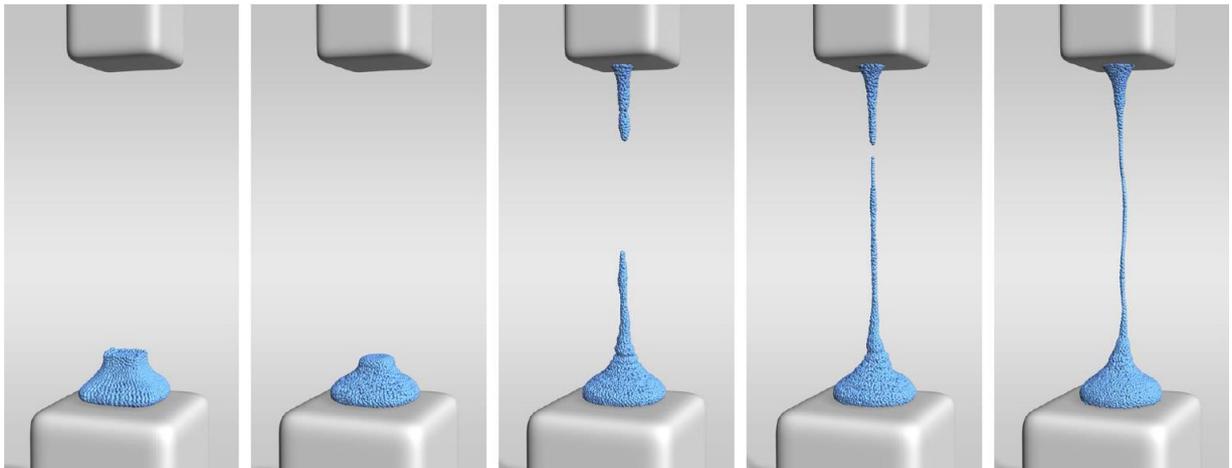


图 47 调解  $\delta$  对流体形态产生的影响

最后需要注意，当流体在运动过程中我们需要不断的对邻域内粒子进行更新，从而也需要相应的对初始形态进行调整。当有新粒子进入到粒子  $i$  的初始邻域时，由于我们并不清楚其相应的参考位置在哪里，但是我们可以根据  $i$  邻域内其他粒子的形变信息预

测其位置。假设我们已知  $i$  的形变梯度为  $\bar{\mathbf{F}}$ ，则我们可以通过以下公式对其初始位置进行估计：

$$\underline{\mathbf{X}}\langle \xi \rangle \approx \bar{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i) = (\underline{\mathbf{X}}^* \underline{\mathbf{Y}})(\underline{\mathbf{Y}}^* \underline{\mathbf{Y}})^{-1}(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i) \quad (127)$$

但是这个方法的缺陷在于当  $\bar{\mathbf{F}}$  是奇异的或者接近奇异时，它有可能将所有新邻域粒子投影到一条线或者一个平面上。为了避免这种情况发生，我们对  $\bar{\mathbf{F}}$  进行了奇异值分解，并将特征根截取到  $[1 + e^{iso} - \|\underline{\mathbf{e}}^{dev}\|, 1 + e^{iso} + \|\underline{\mathbf{e}}^{dev}\|]$  之内，然后再用  $\bar{\mathbf{F}}$  去估计新的初始位置，从而保证程序的稳定性。

## 5.6 颗粒流建模

在建模颗粒流的过程中，我们需要根据颗粒流密度来动态计算 Lamé 系数的大小。这里我们根据沙粒的特性它们分成两部分，这里以  $\lambda$  为例则可以表示为  $\lambda = k_f + k_c$ 。其中  $k_f$  表示摩擦系数， $k_c$  则表示内聚力系数。在定义  $k_f$  数值的时候，我们借鉴[64]的思路，从而其形式可以表示为

$$k_f(\rho) = \begin{cases} K_f e^{H_f(\rho/\rho_0-1)}, & \text{if } \rho \in [\rho_0, +\infty), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (128)$$

其中  $H_f$  表示一个固化系数。直观来说，公式 128 表示当颗粒密度小于  $\rho_0$  时，摩擦力就会消失，这与我们已知的摩擦只有通过接触才能产生的认知是相符的。

而颗粒含有一定水分时，颗粒之间不仅具有摩擦力，同时还有由于水分子液桥力而引起的吸引力[112]。但是目前对液桥力的精确建模依然还有一定困难，因此本文采用一种经验公式来建立  $k_c$  和密度  $\rho$  之间的关系。受指数型表面张力模型的启发[113]，我们定义内聚力系数  $k_c$  的形式如下

$$k_c(\rho) = \begin{cases} K_c, & \text{if } \rho \in [\rho_0, +\infty), \\ K_c e^{H_c(1-\rho/\rho_0)}, & \text{if } \rho \in [\rho_1, \rho_0), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (129)$$

其中  $H_c$  表示衰减系数。从定义中我们可以看出，颗粒密度大于  $\rho_1$  时，内聚力彻底消失。

对于  $H_c$  和  $\rho_1$  的定义，我们采用以下的形式

$$H_c = H_0 \vartheta^{-1/2}, \quad \rho_1 = (1 - b\vartheta)\rho_0 \quad (130)$$

其中  $\vartheta$  表示水分的饱和度， $b$  是一个缩放因子，我们通常直接设置其值为 1。下图演示了不同饱和度的沙粒所展示的颗粒流形态。



图 48 不同水分饱和度对沙子运动的影响

最后我们单独来考虑干沙子的模拟，尽管干沙子可以看作是水分饱和度为 0 的湿沙子的一种特例，但是我们发现对于干沙子模拟可以通过一个简单的策略加快算法的求解过程。首先我们在图 49（左）演示了如果不做任何处理时，即使我们迭代 100 次依然无法得到满足沙堆效果，究其原因在于对于干沙子模拟，我们需要求一个 LCP 问题。为了得到近似的模拟效果，我们在每一个迭代过程中都对以下公式进行检测

$$(\mathbf{y}_i^{t+1} - \mathbf{y}_i^*) \cdot (\mathbf{y}_i^t - \mathbf{y}_i^*) \geq \eta \|\mathbf{y}_i^* - \mathbf{y}_i^t\|^2 \quad (131)$$

假设公式成立时，我们粒子的位置设置为其上一个时刻的位置，即  $\mathbf{y}_i^{t+1} = \mathbf{y}_i^t$ 。我们发现这一个技巧可以有效的加快算法的收敛过程，从而得到理想的干沙子流动效果。图 49（右）展示的是我们仅仅迭代 5 次得到的效果。

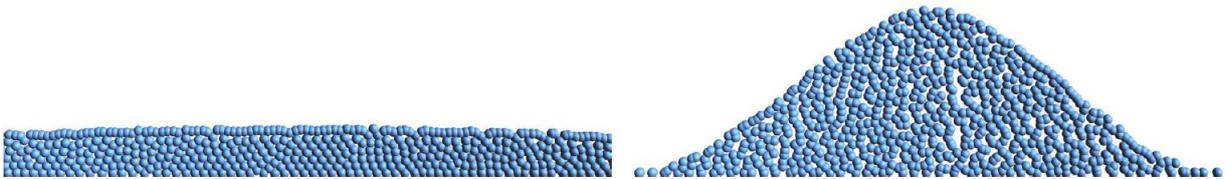


图 49 干沙子的仿真收敛性比较。（左）不做任何处理时的形态；（右）采用本文方法处理后的效果。

此外通过调节摩擦系数的大小，我们也可以很容易调节沙堆的高度，如图 50



图 50 不同摩擦角参数下干沙堆的效果

## 5.7 多介质耦合建模

这一节我们主要展示更多我们方法所能处理的仿真场景。作为一种统一模拟方法，我们方法不仅可以处理单独的材质，如图 51 所展示大规模颗粒流的模拟以及图 52 所示的不同形态的粘弹性流体的模拟。最重要的是，我们可以很方便的处理不同材质之间交互或者相变，如图 53 展示了粘弹性流体和布料之间的交互作用，图 54 则展示了水体和沙粒之间的交互。最后，作为一种统一的弹塑性建模方法，图 55 展示了弹性体和塑性体仿真之间的自然切换。



图 51 大规模湿沙堆模拟

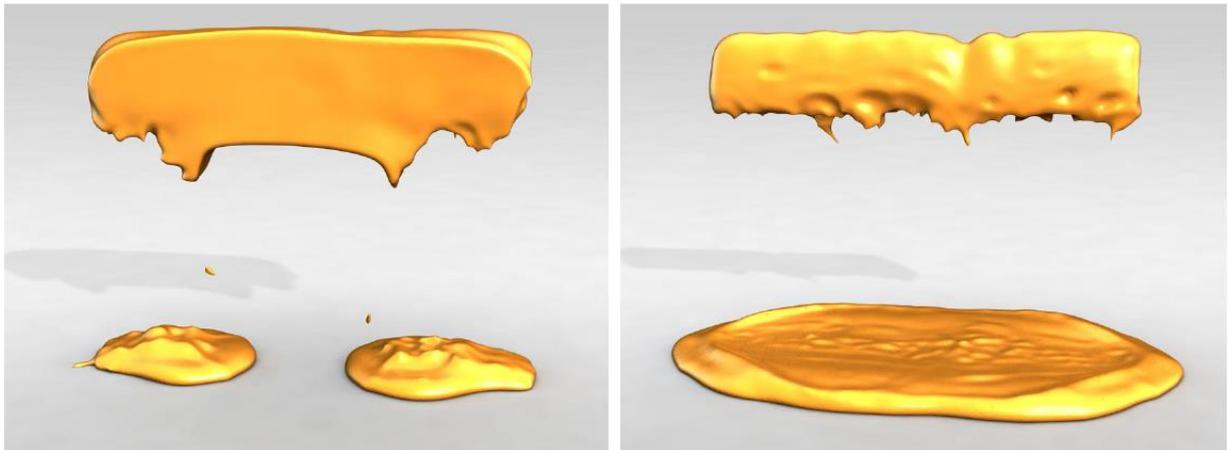


图 52 不同弹性系数下黏弹性流体的模拟

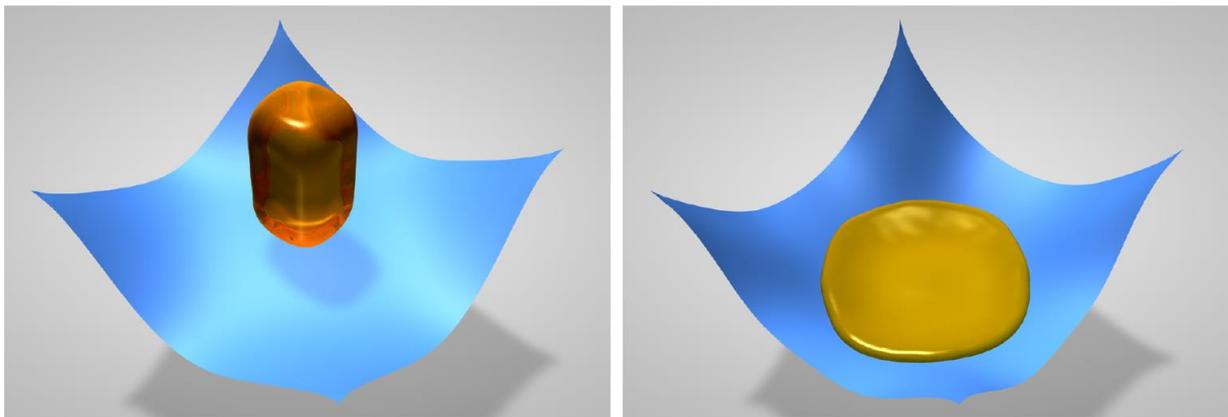


图 53 粘弹性流体与布料的耦合模拟



图 54 流体与沙粒间的耦合模拟



图 55 裙子相变过程的模拟

## 5.8 本章小结

本章主要研究了非局部作用机理在弹塑性材料统一仿真中的应用。为了保证弹塑性材料在极端形变以及多维度几何特征条件下的稳定模拟，我们提出一种新的基于积分形式的本构模型建模材料的弹性部分，并通过采用投影动力学方法直接对形变体的最终形态进行求解。对于塑性部分，我们通过直接更新材料的初始形状的方式来避免奇异性的发生。对于均质粘弹性流体，为了保证流体的均匀性，我们提出一种基于位置的矫正方法来保证仿真粒子分布的均匀性。最后，为了统一建模颗粒流，我们提出一种动态计算材料系数的方法，从而使得我们的方法可以同时模拟干湿沙粒。实验结果还进一步展示了我们方法可以统一模拟多种材质交互的场景。

## 第六章 物理仿真引擎统一框架的设计与实现

### 6.1 总体框架

图 56 展示了统一物理引擎的总体框架。为了保证系统的高效性和兼容性，系统基于 CPU 和 GPU 混合结构来设计实现。系统核心部分主要包含六个主要组成部分，即如图 56 所示的 IWindow、IRenderer、ISimulation、IFile、IModule、IMemory。下面来讨论一个模块所对应的功能以及接口设计。

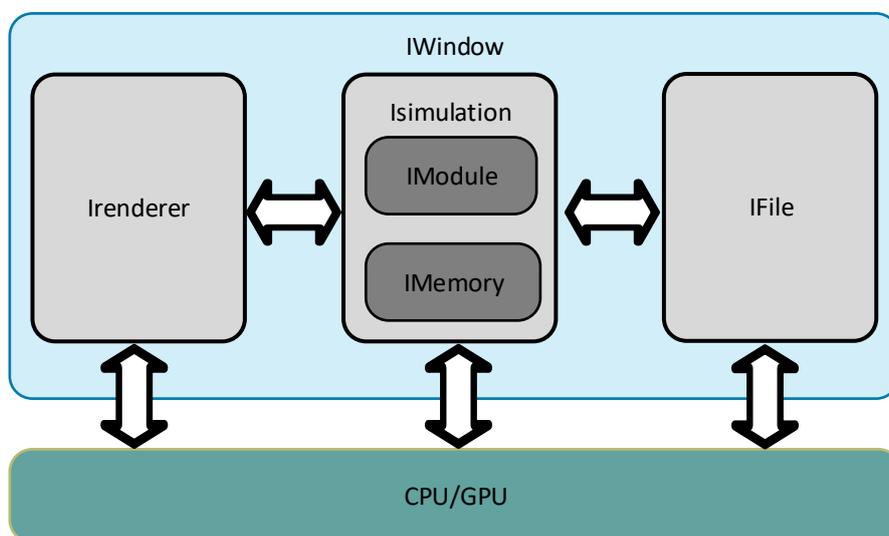


图 56 系统实现总体框架

IWindow 作为 GUI 接口, 其主要负责与底层的操作系统打交道。其类图如 57 所示

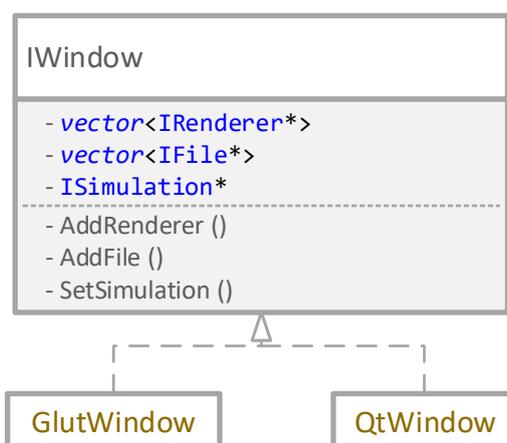


图 57 IWindow 接口设计与实现

其具体实现则需要根据系统的支持情况来决定，目前主流的支持 OpenGL 图形接口窗口系统较多，本系统实现了基于 Glut 和 Qt 共两个版本。

IRenderer 作为渲染模块，主要负责与底层的 OpenGL 打交道，其接口主要包含 Render

函数用于执行渲染操作。而实现类则主要包括用于点渲染、线条渲染、面渲染、体绘制等基本功能。

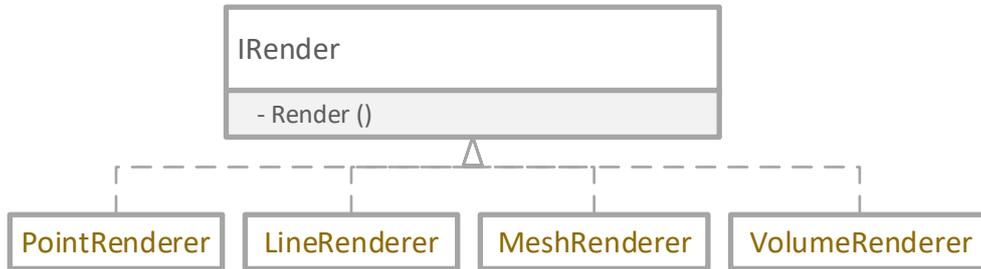


图 58 IRender 接口设计与实现

IFile 为基础文件读写接口，主要功能包括模型文件、场景文件、图像、着色语言文件等读写操作。

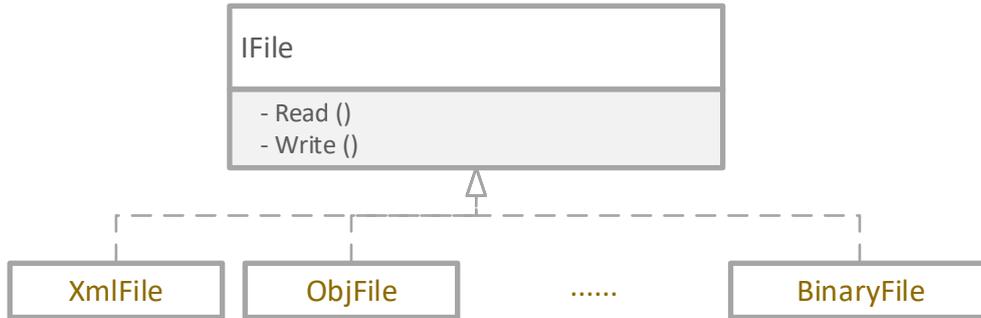


图 59 IFile 接口设计与实现

ISimulation 是整个物理引擎的核心，其主要负责物理仿真算法的实现。其实现类主要包含两个，其中 UnstructuredParticles 基于无结构粒子，主要用于流体的仿真；StructuredParticles 继承自 UnstructuredParticles，主要用于弹塑性材料的模拟。

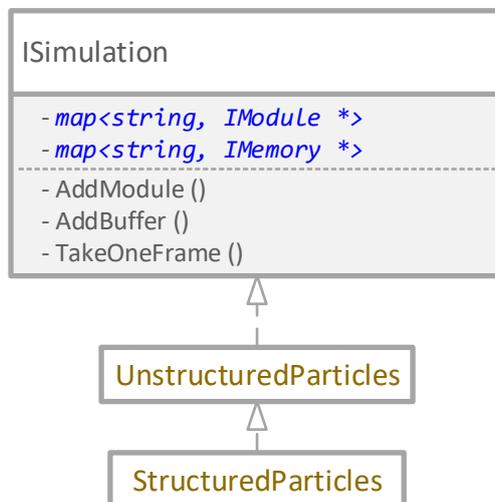


图 60 ISimulation 接口设计与实现

IModule 代表了功能独立的仿真算法,比如流体的不可压缩性求解、表面张力的计算、弹性力的计算等等,通过将各算法独立封装,我们可以容易的根据材料的属性进行组合,从而增加代码的可重用性,加快仿真算法的开发效率。

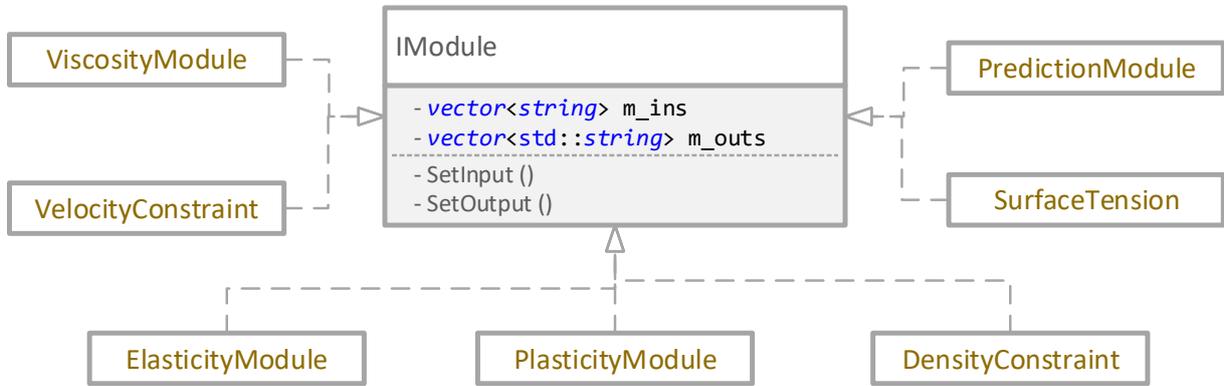


图 61 IModule 接口设计与实现

最后,IMemory 主要是会对底层数据结构的封装,由于本系统同时支持 CPU 和 GPU,因此需要保证设计的底层数据结构能够同时支持 CPU 和 GPU,同时为了提高开发效率,所有底层数据结构都采用 C++模板进行设计。

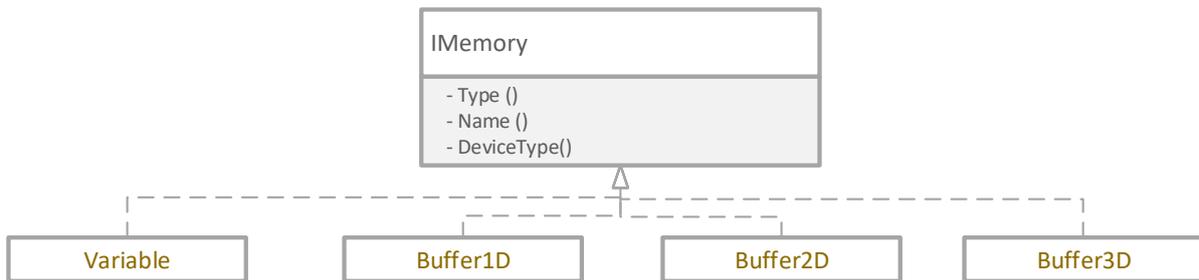


图 62 IMemory 接口设计与实现

接下来我们就系统实现过程中的一些重要模块及实现细节进行介绍。

## 6.2 有向距离场

有向距离场作为一种重要的工具,在场景初始化以及碰撞检测都方面都发挥着重要的作用。其一般性的定义为

$$f(x) = \begin{cases} d(x, \partial\Omega), & x \in \Omega \\ -d(x, \partial\Omega), & x \in \Omega^c \end{cases} \quad (132)$$

其中  $\Omega$  为封闭区域,  $\partial\Omega$  为封闭区域的边界,  $d(x, \partial\Omega)$  衡量的是  $x$  到边界的最短距离。根据其定义,我们可以得出有向距离场的几条重要性质。

(1) 我们可以根据  $f(x)$  的符号来判断  $x$  所处的位置, 当  $f(x) > 0$ , 说明  $x$  点处于  $\Omega$  的内部。这一性质在对封闭几何模型进行离散化的时候非常有用, 我们可以先对几何模型生成其相应的距离场, 然后根据距离场的值对其离散化从而得到相应的离子形式表示的体模型。如图 63 展示了 Standard 兔子离散之前和离散之后的形态。

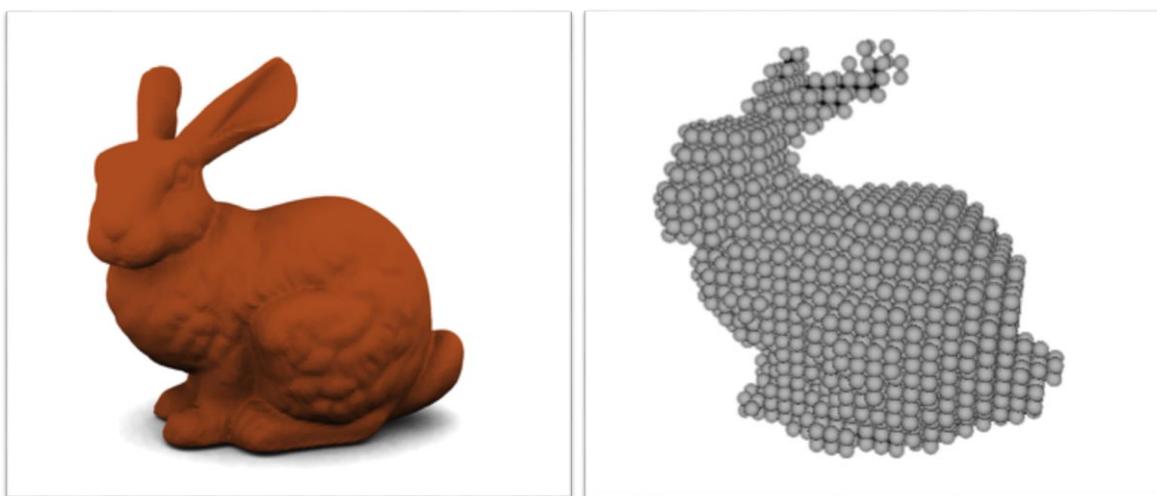


图 63 Stanford bunny 离散前与离散后的形态展示

(2) 第二个重要性质是, 当  $\mathbf{x}$  处于  $\partial\Omega$  附近时, 如图 64 所示, 我们可以近似找到  $\partial\Omega$  上离  $\mathbf{x}$  处最近的点, 即  $\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$ 。这一性质可以用于对粒子与碰撞物体发生穿透之后修正其位置。此外由于  $f(\mathbf{x})$  是通过离散的形式预先存储在均匀网格上的, 因而  $f(\mathbf{x})$  和  $\nabla f(\mathbf{x})$  的查找和计算也都非常便捷和高效。

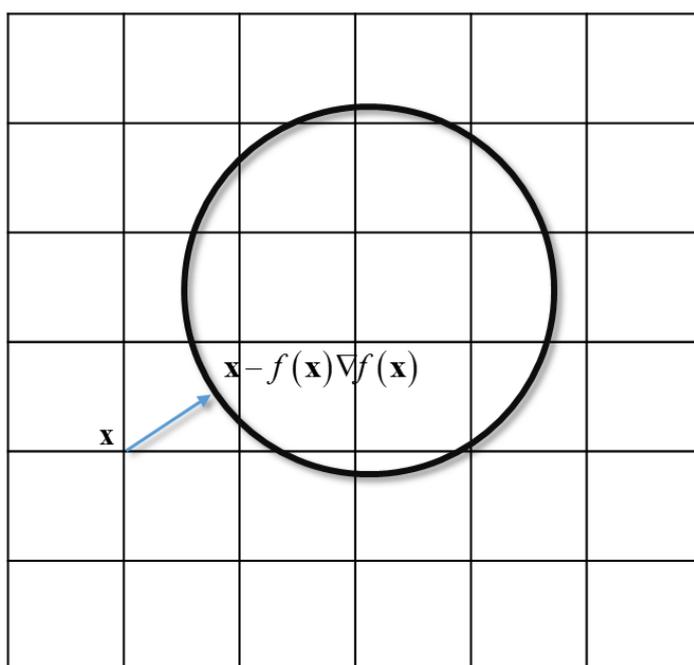


图 64 有向距离场示意图

### 6.3 形函数

基于粒子的仿真需要用到大量形函数  $W(x-x')$ ，为了保证仿真的精度和效率，形函数的选取通常应满足以下三个条件：

(1) 正则化条件，即

$$\int_{\Omega} W(x-x') dx' = 1$$

(2) 当光滑长度  $h$  趋于 0 的时候，核函数趋近于狄拉克函数

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x') = \delta(x-x')$$

(3) 紧致性

$$W(x-x') = 0, \text{ 当 } |x-x'| > h$$

对于  $W(x-x')$  函数不为 0 的区域通常称之为支撑域，当然在某些情况下条件 (2) 的限制可以放宽。本文中用到较多的为如下形式的 B-样条函数

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3, & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - R)^3, & 1 \leq R < 2 \\ 0, & R \geq 2 \end{cases} \quad (133)$$

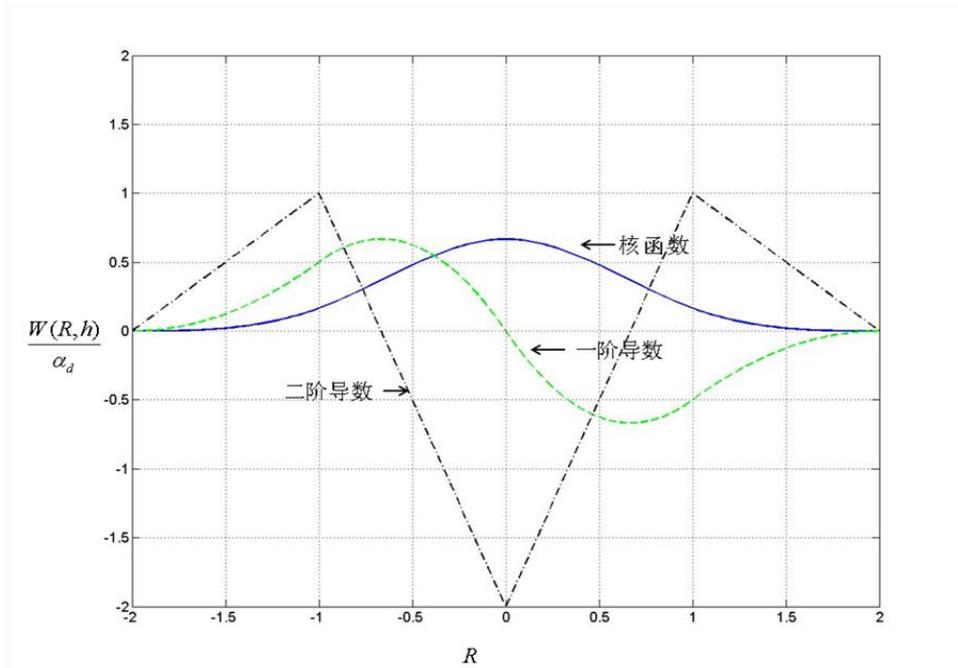


图 65 形函数示意图

该形函数的优点是实现简单，且具有较好的稳定。当然，对于特定的情况，如我们只考虑正压强时，我们可以设计特定形式的形函数来保证仿真的稳定性，比如[8]中所采用的 Spiky 函数。

## 6.4 邻域表建立

在流体仿真过程中，由于流体的拓扑不会不断发生变化，因而我们需要对每一个仿真步开始之前为每个粒子建立最近邻域粒子列表。由于本系统都采用固定质量的粒子，因而我们可以采用如图 66 所示的均匀欧拉网格加速邻域的查过过程。其具体流程如下：

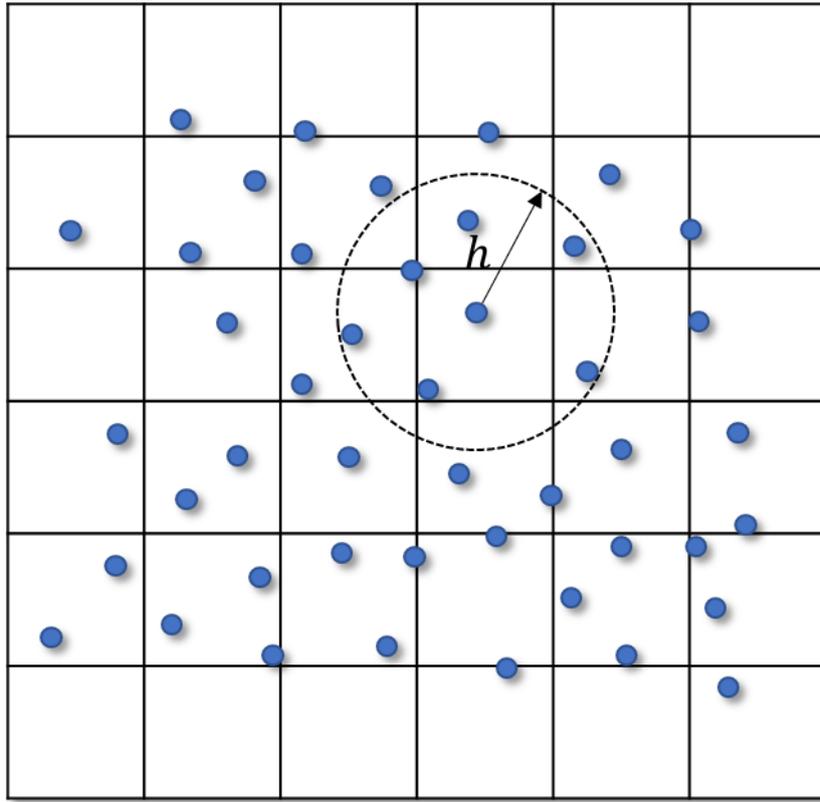


图 66 邻接表建立过程示意图

- (1) 根据粒子的分布构建背景网格，网格的间距等于粒子的支撑域半径  $h$ ，同时为每一个网格单元建立位移的标识，且分配一定数量的存储空间用于标记处于该网格内部的粒子；
- (2) 根据粒子当前所处的位置计算其对应的网格单元，并将粒子的序号存入相应网格单元的缓冲区；
- (3) 最后，根据粒子  $i$  所处的网格单元，计算该网格单元以及所有邻接网格单元内的粒子  $j$  与当前粒子之间的距离，当距离小于  $h$  时，我们就将  $j$  存入  $i$  的邻域表中。

基于 C++ 的邻域表定义如下，其中 `size` 表示邻域的数量，并初始化为 0，`ids` 则表示邻域的粒子的唯一标识符。另外在实现过程中，我们为了提高效率，通常指存储靠近中心点最近的  $N$  个粒子。为了同时兼顾效率和精度，本系统实现过程中  $N$  一般取 30。

```

class NeighborList
{
public:
    NEO_HYBRID_FUNC NeighborList() { size = 0; }
    NEO_HYBRID_FUNC ~NeighborList(){};

    NEO_HYBRID_FUNC int& operator[] (int id) { return ids[id]; }
    NEO_HYBRID_FUNC int operator[] (int id) const { return ids[id]; }
public:
    int size;
    int ids[NEIGHBOR_SIZE];
};

```

## 6.5 表面重构

由于目前渲染管线主要是基于三角网格进行，因而我们需要根据粒子分布生成其对应的表面网格进行显示。因此，本文采用[114]中方法首先构建一个表面光滑的有向距离场，如图 67 所示，其思想是先初始化两个有向距离场  $\phi_{\min}$  和  $\phi_{\max}$ ， $\phi_{\min}$  表示半径为  $r_{\min}$  的球的并集（如图绿线所示）， $\phi_{\max}$  则表示半径为  $r_{\max}$  的并集（如图蓝线所示）。从图上的形态可以看出，此时  $\phi_{\min}$  和  $\phi_{\max}$  的表面并不光滑，因而需要通过平滑操作得到最终的表面。其可以通过求解以下形式能量的最优化解来得到。

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi_{xx}^2 + \phi_{yy}^2 + \phi_{zz}^2 + \phi_{xy}^2 + \phi_{yz}^2 + \phi_{zx}^2 dx dy dz \quad (134)$$

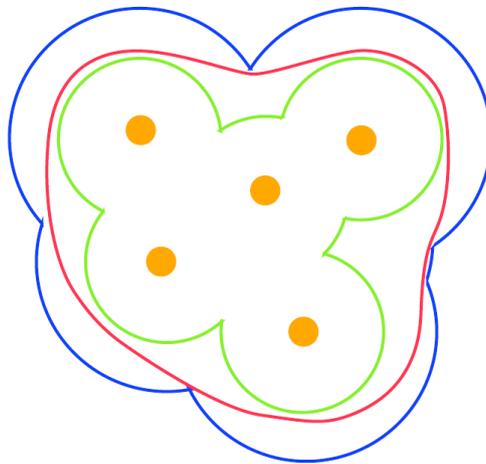


图 67 基于能量法距离场计算方法示意图

在得到最优化解  $\phi$  之后，我们就可以利用 Marching Cubes 方法来得到三角网格 [115]。其中三维空间中每个网格单元对应的三角网格共有 15 种，如下图所示

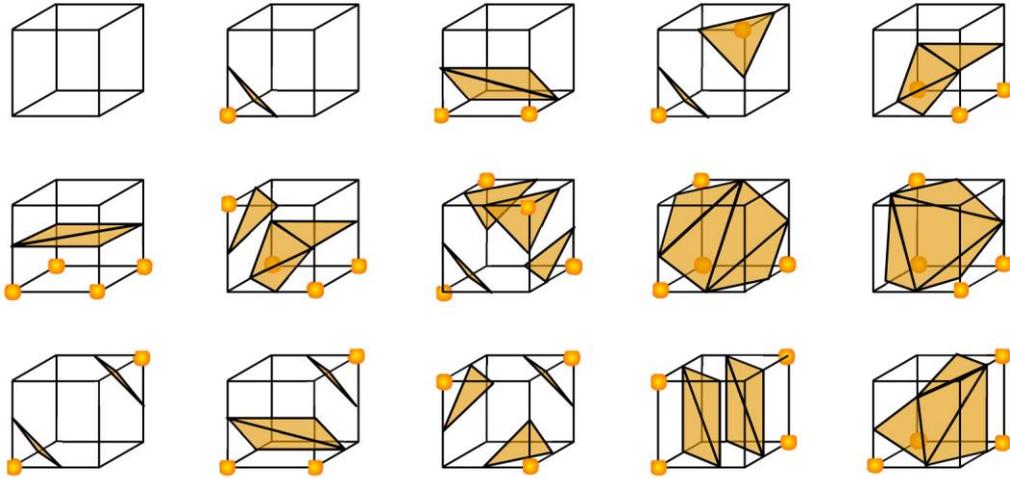


图 68 Marching Cubes 方法示意图

在得到表面网格之后，对于表面波，我们需要根据波动密度的大小对 Marching Cubes 得到的网格进行调整。如图 69，所示，假设虚线部分为得到的初始网格，则我们需要对每个顶点沿其发现法向做调整，具体的调整公式如下

$$\Delta \mathbf{x}_l = \delta \left( \frac{\sum_i \Delta r_i W_{li}}{\sum_i W_{li}} \right)^{\gamma} \mathbf{n}_l \quad (135)$$

其中  $\delta$  是调解参数，用于控制表面波的震动幅度， $\mathbf{n}_l$  为顶点的单位法向，

$r_i(\rho_i) = (3m_i / (4\pi\rho_i))^{1/3}$  则表示了粒子的半径。

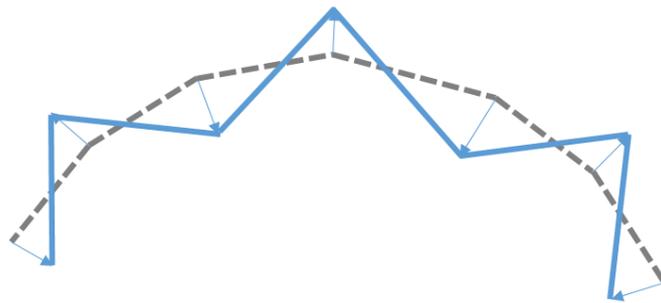


图 69 表面扰动过程示意图

最后我们可以利用 OpenGL 的渲染管线或者光线跟踪技术来渲染得到具有透明效果的流体效果。另外对于形变体，由于其拓扑结构是固定的，因此我们只在仿真开始的时候构建一次表面网格，然后通过粒子与网格直接的位置关系进行匹配，最后在仿真过程会

---

让网格跟随粒子一块运动。

## 6.6 本章小结

本章主要讨论了如何基于非局部作用机理设计并实现统一的物理仿真引擎框架。我们首先给出了框架的整体结构以及各个模块所对应的功能和接口。随后，我们详细讨论了引擎设计过程中几个重要模块的实现细节，主要包括有向距离场的功能和定义、形函数的选取、邻接表的建立方式以及表面重构过程中所采用的方法。

## 第七章 总结与展望

### 7.1 本文总结

物理仿真作为图形学中一种重要的建模手段，已经展示出了其他方法所无可比拟的优势。然而现有物理仿真技术主要基于连续介质力学，其在描述和建模现实世界中复杂场景时存在诸多的问题和不足。为了拓展物理仿真技术的使用范围和建模能力，本文基于非局部作用机理对传统连续介质力学进行了拓展，同时研究了如何基于非局部作用机理进行流体仿真、弹塑性材料仿真等的统一建模和仿真。归纳起来，本文的内容和创新点可以总结为以下三个方面：

(1) 详细探讨了连续介质力学的理论基础及其在建模复杂场景时的局限性，并根据连续介质力学中场、梯度、散度和旋度的定义在非局部作用机理的框架下重新阐述了非局部框架下的场、梯度、散度和旋度的定义，揭示了它们背后的含义。同时，为了克服连续介质力学中微分方程在建模运动控制方程中局限性，本文引入态的概念，并将连续介质力学中应力张量、应变张量等只适用于描述连续介质的量拓展到同时适用于描述连续和非连续介质的应力态和应变态，并将运动控制方程转换成了积分方程的形式。

(2) 为了解决长期以来已知困扰传统 SPH 方法的拉伸不稳定性以及边界粒子缺失等问题，我们利用变分法对流体的压强泊松方程进行了转换，并将其转换成了最优化问题进行求解。同时我们提出半分析法用于解决边界粒子缺失的问题，从而保证在不增加计算开销的前提下提升了仿真的计算精度。接下来，我们针对自由表面流中表面张力计算不稳定精度差的问题，利用 Helmholtz 自由能提出了一种新的表面张力模型，保证即使在稀疏采样的前提下依然可以得到稳定可靠的表面张力计算结果。最为，为了增强表面细节，我们利用声波近似模拟了表面张力波的生成和传播的过程。

(3) 为了保证弹性材料在极端形变以及多维度几何特征条件下的稳定模拟，我们提出一种新的基于积分形式的本构模型建模材料的弹性部分。对于塑性部分，我们通过直接更新材料的初始形状的方式来避免奇异性的发生。此外，为了保证均质流体内部的均匀性，我们提出一种基于位置的矫正方法来保证仿真粒子分布的均匀性。最后，我们根据颗粒流水分的饱和度以及颗粒密度提出一种动态计算材料系数的方法，从而使得我们的方法可以用统一的方式模拟不同饱和度下的颗粒流。

## 7.2 未来展望

与连续介质力学相比，非局部作用机理的发展时间较短，目前其理论也存在诸多的不完善，需要研究人员的不断努力来推动非局部作用机理的发展，具体主要体现在以下几个方面：

(1) 非局部作用机理的发展之初是为了拓展连续介质力学中的不足，这要求非局部作用机理可以在解决连续介质力学不足的同时也能够保证其在建模连续介质时同样也能够处理连续介质力学所擅长的问题。然而已知的研究表明，同样在建模连续介质时，非连续介质力学和非局部作用机理并不等效。比如我们无法通过某一基于连续介质力学的非线性本构模型推导出其对应的非局部作用形式。反之，假设我们已知基于非局部作用机理的本构关系，我们很多时候也无法得出其对应的基于连续介质力学的版本。这就导致连续介质力学邻域积累数百年的研究成果并无法应用于非局部作用机理中。

(2) 非局部作用机理中关于“作用”的设计和建模缺乏理论指导，目前比较典型的相互作用实际上是依据连续介质力学中的一些力学原理而推导出来的一些强相互作用，至于这些作用的形式是否能真实的反应客观的物理现象实际上并不清楚。此外，假设我们已知介质所展示出来的物理现象，我们又是否可以从现象到本质，利用诸如深度神经网络等工具来反推得到介质的非局部作用模型。此外，当前作用发生区域依然只局限于邻域内，对于相隔较远距离的区域，他们之间是否存在弱相互作用，以及弱相互作用该如何建模等问题也需要再后期的研究中发展和完善。

(3) 最后，由于非局部作用机理主要基于积分方程，其邻域的数量将直接决定仿真计算的复杂性，因而需要我们研究如何通过粗化技术来提升仿真的效率。这实际上要求我们深入挖掘非局部理论中相互作用的本质，能根据其直观的含义有针对性地对算法的性能进行优化。



## 参考文献

- [1] <http://news.mtime.com/2016/04/22/1554717-all.html>.
- [2] [http://www.360doc.com/content/17/0419/11/42096791\\_646788793.shtml](http://www.360doc.com/content/17/0419/11/42096791_646788793.shtml)
- [3] <https://developer.nvidia.com/flex>
- [4] <https://www.autodeskresearch.com/projects/nucleus>
- [5] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 1977, 82: 1013-1024.
- [6] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181: 375-389.
- [7] M. Desbrun and M.-P. Gascuel. Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. *Proceedings of the Eurographics Workshop, Poitiers, France, Springer, 1996*, 61-76.
- [8] M. Muller, D. Charypar and M. Gross. Particle-based fluid simulation for interactive applications. *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, San Diego, California, Eurographics Association, 2003*, 154-159.
- [9] M. Becker and M. Teschner. Weakly compressible SPH for free surface flows. *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, San Diego, California, Eurographics Association, 2007*, 209-217.
- [10] B. Solenthaler and R. Pajarola. Predictive-corrective incompressible SPH. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2009, 28 (3): 1-6.
- [11] M. Ihmsen, J. Cornelis, B. Solenthaler, C. Horvath and M. Teschner. Implicit Incompressible SPH. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2014, 20 (3): 426-435.
- [12] X. He, N. Liu, G. Wang, F. Zhang, S. Li, S. Shao and H. Wang. Staggered meshless solid-fluid coupling. *ACM Trans. Graph.*, 2012, 31 (6): 1-12.
- [13] J. Bender and D. Koschier. Divergence-free smoothed particle hydrodynamics. *Proceedings of the 14th ACM SIGGRAPH / Eurographics Symposium on Computer Animation, Los Angeles, California, ACM, 2015*, 147-155.
- [14] M. Ihmsen, J. Cornelis, B. Solenthaler, C. Horvath and M. Teschner. Constraint Fluids. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2012, 18 (3): 516 - 526.
- [15] M. Macklin and M. Müller. Position based fluids. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2013, 32 (4): 1-12.

- [16] X. He, H. Wang, F. Zhang, H. Wang, G. Wang and K. Zhou. Robust simulation of sparsely sampled thin features in SPH-based free surface flows. *ACM Trans. Graph.*, 2014, 34 (1): 1-9.
- [17] N. Akinci, G. Akinci and M. Teschner. Versatile surface tension and adhesion for SPH fluids. *ACM Trans. Graph.*, 2013, 32 (6): 1-8.
- [18] B. Solenthaler and R. Pajarola. Density contrast SPH interfaces. *Proceedings of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, Dublin, Ireland, Eurographics Association, 2008, 211-218.
- [19] B. Ren, C. Li, X. Yan, M. C. Lin, J. Bonet and S.-M. Hu. Multiple-Fluid SPH Simulation Using a Mixture Model. *ACM Trans. Graph.*, 2014, 33 (5): 1-11.
- [20] H. Schechter and R. Bridson. Ghost SPH for animating water. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2012, 31 (4): 61.
- [21] N. Akinci, M. Ihmsen, G. Akinci, B. Solenthaler and M. Teschner. Versatile rigid-fluid coupling for incompressible SPH. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2012, 31 (4): 62.
- [22] M. Ihmsen, N. Akinci, M. Becker and M. Teschner. A Parallel SPH Implementation on Multi-Core CPUs. *Computer Graphics Forum*, 2015, 30 (1): 99-112.
- [23] B. Adams, M. Pauly, R. Keiser and L. J. Guibas. Adaptively sampled particle fluids. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2007, 26 (99): 48.
- [24] B. Solenthaler and M. Gross. Two-scale particle simulation. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2011, 30 (4): 1-8.
- [25] R. Winchenbach, H. Hochstetter and A. Kolb. Infinite continuous adaptivity for incompressible SPH. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2017, 36 (4): 1-10.
- [26] G. Akinci, N. Akinci, M. Ihmsen and M. Teschner. An Efficient Surface Reconstruction Pipeline for Particle-Based Fluids. *VRIPHYS*, The Eurographics Association, 2012.
- [27] E. Rustico, G. Bilotta, A. Herault, C. D. Negro and G. Gallo. Advances in Multi-GPU Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations. *IEEE Transactions on Parallel & Distributed Systems*, 2013, 25 (1): 43-52.
- [28] M. Ihmsen, J. Orthmann, B. Solenthaler, A. Kolb and M. Teschner. SPH fluids in computer graphics. *The Eurographics Association*, 2014,
- [29] M. B. Liu and G. R. Liu. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2010, 17 (1): 25-76.
- [30] J. Stam. Stable fluids. *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 1999, 121-128.

- [31] N. Foster and R. Fedkiw. Practical animation of liquids. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2001, 23-30.
- [32] D. Enright, S. Marschner and R. Fedkiw. Animation and rendering of complex water surfaces. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2002, 21 (3): 736-744.
- [33] F. Losasso, T. Shinar, A. Selle and R. Fedkiw. Multiple interacting liquids. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2006, 25(3), 812-819.
- [34] J. Stam, J. Stam and H. W. Jensen. Visual simulation of smoke. *Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2001, 15-22.
- [35] D. Q. Nguyen, R. Fedkiw and H. W. Jensen. Physically based modeling and animation of fire. *SIGGRAPH*, 2002, 721-728.
- [36] Y. Zhu and R. Bridson. Animating sand as a fluid. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2005, 24 (3): 965-972.
- [37] C. Batty, F. Bertails and R. Bridson. A Fast Variational Framework for Accurate Solid-Fluid Coupling. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2007, 26 (3): 100.
- [38] X. He, H. Wang, F. Zhang, H. Wang, G. Wang, K. Zhou and E. Wu. Simulation of fluid mixing with interface control. *ACM SIGGRAPH / Eurographics Symposium on Computer Animation*, 2015, 129-135.
- [39] F. De Goes, C. Wallez, J. Huang, D. Pavlov and M. Desbrun. Power particles: an incompressible fluid solver based on power diagrams. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2015, 1-11.
- [40] H. Zhu, K. Bao, E. Wu and X. Liu. Stable and efficient miscible liquid-liquid interactions. *ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology*, 2007, 55-64.
- [41] D. Terzopoulos and K. Fleischer. Deformable models. *The Visual Computer*, 1988, 4 (6): 306-331.
- [42] D. Terzopoulos and K. Fleischer. Modeling inelastic deformation: viscoelasticity, plasticity, fracture. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 1988, 22 (4): 269-278.
- [43] D. Terzopoulos, J. Platt and K. Fleischer. From goop to glop: heating and melting deformable models. *Graphics Interface*, 1989, 68-73.
- [44] J. F. O'Brien and J. K. Hodgins. Graphical modeling and animation of brittle fracture. *Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 1999, 137-146.
- [45] J. F. O'Brien, A. W. Bargteil and J. K. Hodgins. Graphical modeling and animation of ductile fracture. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2002, 21 (3): 291-294.
- [46] Y. Li and J. Barbic. Stable Anisotropic Materials. *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, 2015, 21 (10): 1129-37.

- [47] H. Xu, F. Sin and Y. Zhu. Nonlinear material design using principal stretches. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2015, 34 (4): 75.
- [48] I. M. Müller, B. Heidelberger, M. Hennix and J. Ratcliff. Position Based Dynamics. *J. Vis. Commun. Image Represent.*, 2007, 18 (2): 109-118.
- [49] T. Stumpff, J. Spillmann, M. Becker and M. Teschner. A Geometric Deformation Model for Stable Cloth Simulation. *The Workshop on Virtual Reality Interactions & Physical Simulations*, 2008, 39-46.
- [50] J. Bender, D. Weber and R. Dziol. Fast and stable cloth simulation based on multi-resolution shape matching. *Computers & Graphics*, 2013, 37 (8): 945-954.
- [51] M. Müller, T. Y. Kim and N. Chentanez. Fast Simulation of Inextensible Hair and Fur. *Virtual Reality Interactions and Physical Simulations*, 2012,
- [52] M. Teschner, S. Kimmerle, B. Heidelberger, G. Zachmann, L. Raghupathi, A. Fuhrmann, P. Cani M., F. Faure, N. Magnenat-Thalmann and W. Strasser. Collision Detection for Deformable Objects. *Computer Graphics Forum*, 2004, 61&ndash;81.
- [53] S. Bouaziz, S. Martin, T. Liu, L. Kavan and M. Pauly. Projective dynamics: Fusing constraint projections for fast simulation. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2014, 33 (4): 1-11.
- [54] H. Wang. A Chebyshev Semi-iterative Approach for Accelerating Projective and Position-based Dynamics. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH Asia)*, 2015, 34 (6): 1-9.
- [55] T. Liu, A. W. Bargteil, J. F. O'Brien and L. Kavan. Fast simulation of mass-spring systems. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2013, 32 (6): 214.
- [56] M. Becker, M. Ihmsen and M. Teschner. Corotated SPH for deformable solids. *Eurographics Conference on Natural Phenomena*, 2009, 27-34.
- [57] A. Luciani, A. Habibi and E. Manzotti. A multi-scale physical model of granular materials. *Proceedings of Graphics Interface*, 1995: 136-146.
- [58] N. Bell, Y. Yu and P. J. Mucha. Particle-based simulation of granular materials. *ACM Siggraph/eurographics Symposium on Computer Animation, SCA 2005*, Los Angeles, CA, USA, July, 2005, 77-86.
- [59] Pöschel and Thorsten. *Computational Granular Dynamics: Models and Algorithms*. 2005, 8 (1): 55.
- [60] D. M. Kaufman, T. Edmunds and D. K. Pai. Fast frictional dynamics for rigid bodies. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2005, 24 (3): 946-956.
- [61] D. M. Kaufman, S. Sueda, D. L. James and D. K. Pai. Staggered projections for frictional contact in multibody systems. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2008, 27 (5): 32-39.
- [62] R. Tonge, F. Benevolenski and A. Voroshilov. Mass splitting for jitter-free parallel

- rigid body simulation. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2012, 31 (4): 1-8.
- [63] R. Narain, A. Golas and M. C. Lin. Free-flowing granular materials with two-way solid coupling. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2010, 29 (6): 1-10.
- [64] A. Stomakhin, L. Chai, L. Chai, A. Selle and A. Selle. A material point method for snow simulation. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2013, 32 (4): 102.
- [65] T. Gast, A. Pradhana, C. Fu, C. Schroeder, C. Jiang and J. Teran. Drucker-prager elastoplasticity for sand animation. *ACM Trans. Graph.*, 2016, 35 (4): 1-12.
- [66] 黄克智. 张量分析[第二版]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [67] S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu and E. Askari. Peridynamic States and Constitutive Modeling. *Journal of Elasticity*, 2007, 88 (2): 151-184.
- [68] Q. Du, M. Gunzburger, R. B. Lehoucq and K. Zhou. A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 2013, 23 (03): -.
- [69] X. He, N. Liu, S. Li, H. Wang and G. Wang. Local Poisson SPH For Viscous Incompressible Fluids. *Computer Graphics Forum*, 2012, 31 (6): 1948-1958.
- [70] Belytschko, Xiao and Shaoping. Stability analysis of particle methods with corrected derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 2002, 43 (3): 329-350.
- [71] P. Nair and G. Tomar. An improved free surface modeling for incompressible SPH. *Computers & Fluids*, 2014, 102: 304-314.
- [72] G. C. Ganzenmüller, S. Hiermaier and M. May. On the similarity of meshless discretizations of Peridynamics and Smooth-Particle Hydrodynamics. Pergamon Press, Inc., 2015,
- [73] S. J. Cummins and M. Rudman. An SPH Projection Method. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152 (2): 584-607.
- [74] F. Losasso, J. Talton, N. Kwatra and R. Fedkiw. Two-way coupled SPH and particle level set fluid simulation. *IEEE Trans Vis Comput Graph*, 2008, 14 (4): 797-804.
- [75] K. Raveendran, C. Wojtan and G. Turk. Hybrid smoothed particle hydrodynamics. *Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, Vancouver, British Columbia, Canada, 2011, 33-42.
- [76] J. P. Morris. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, 33 (3): 333-353.
- [77] X. Y. Hu and N. A. Adams. A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows. *Journal of Computational Physics*, 2006, 213 (2): 844-861.

- [78] F. V. Sirotkin and J. J. Yoh. A new particle method for simulating breakup of liquid jets. Academic Press Professional, Inc., 2012,
- [79] S. Nugent and H. A. Posch. Liquid drops and surface tension with smoothed particle applied mechanics. *Physical Review E*, 2000, 62 (4 Pt A): 4968-4975.
- [80] A. Tartakovsky and P. Meakin. Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodynamics. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2005, 72 (2): 026301.
- [81] H. Gotoh and A. Khayyer. Current achievements and future perspectives for projection-based particle methods with applications in ocean engineering. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2016, 2 (3): 251-278.
- [82] R. Bridson. *Fluid Simulation for Computer Graphics*. A K Peters, 2008,
- [83] X. Y. Hu and N. A. Adams. An incompressible multi-phase SPH method. *Journal of Computational Physics*, 2007, 227 (1): 264-278.
- [84] Sheng. Yang, X. He, H. Wang, S. Li, G. Wang, E. Wu and K. Zhou. Enriching SPH simulation by approximate capillary waves. *ACM Siggraph/eurographics Symposium on Computer Animation*, 2016, 29-36.
- [85] D. Le Touz é A. Colagrossi, G. Colicchio and M. Greco. A critical investigation of smoothed particle hydrodynamics applied to problems with free-surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013, 10.1002/fld.3819: n/a-n/a.
- [86] S. Shao and E. Y. M. Lo. Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. *Advances in Water Resources*, 2003, 26 (7): 787-800.
- [87] M. u. Matthias, R. Keiser, A. Nealen, M. Pauly, M. Gross and M. Alexa. Point based animation of elastic, plastic and melting objects. *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, Aire-la-Ville, Switzerland, , Eurographics Association,2004, 141-151.
- [88] S. Martin, P. Kaufmann, M. Botsch, E. Grinspun and M. Gross. Unified Simulation of Elastic Rods, Shells, and Solids. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2010, 29 (4): 1-10.
- [89] Solenthaler B. , Schläfli J. and P. R. A Unified Particle Model for Fluid-Solid Interactions. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2007, 18: 69-82.
- [90] N. Liu, X. He, S. Li and G. Wang. Meshless simulation of brittle fracture. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2011, 22 (2-3): 115-124.
- [91] M. Pauly, R. Keiser, B. Adams, P. Dutr é M. Gross and L. J. Guibas. Meshless Animation of Fracturing Solids. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2005, 24 (3): 957.

- [92] M. Macklin, M. Macklin and M. Macklin. Strain based dynamics. ACM Siggraph/eurographics Symposium on Computer Animation, Copenhagen, Denmark, Eurographics Association, 2014, 149-157.
- [93] J. A. Levine, A. W. Bargteil, C. Corsi, J. Tessendorf and R. Geist. A Peridynamic Perspective on Spring-mass Fracture. Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, Copenhagen, Denmark, 2014, 47-55.
- [94] S. A. Silling. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48 (1): 175-209.
- [95] A. Paiva, F. Petronetto, T. Lewiner and G. Tavares. Particle-based non-Newtonian fluid animation for melting objects. *IEEE Computer Society*, 2006, 78-85.
- [96] D. Gerszewski, H. Bhattacharya and A. W. Bargteil. A Point-based Method for Animating Elastoplastic Solids. New York, NY, USA, ACM, 2009, 133-138.
- [97] n. I. a. n. Aldu'a and M. A. Otaduy. SPH granular flow with friction and cohesion. Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, Vancouver, British Columbia, Canada, ACM, 2011, 25-32.
- [98] B. Jones, S. Ward, A. Jallepalli, J. Perenia and A. W. Bargteil. Deformation embedding for point-based elastoplastic simulation. *ACM Trans. Graph.*, 2014, 33 (2): 1-9.
- [99] C. Jiang, C. Schroeder, A. Selle, J. Teran and A. Stomakhin. The Affine Particle-in-cell Method. *ACM Trans. Graph.*, 2015, 34 (4): 1-10.
- [100] A. Stomakhin, C. Schroeder, C. Jiang, L. Chai, J. Teran and A. Selle. Augmented MPM for phase-change and varied materials. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2014, 33 (4): 1-11.
- [101] Y. Yue, B. Smith, C. Batty, C. Zheng and E. Grinspun. Continuum Foam: A Material Point Method for Shear-Dependent Flows. *ACM Trans. Graph.*, 2015, 34 (5): 1-20.
- [102] F. Zhu, J. Zhao, S. Li, Y. Tang and G. Wang. Dynamically Enriched MPM for Invertible Elasticity. *Computer Graphics Forum*, 2016, 36 (6):
- [103] C. Jiang, T. Gast and J. Teran. Anisotropic Elastoplasticity for Cloth, Knit and Hair Frictional Contact. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2017, 36 (4): 1-14.
- [104] M. Macklin, I. M. M'u, N. Chentanez and T.-Y. Kim. Unified particle physics for real-time applications. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2014, 33 (4): 1-14.
- [105] H. Wang. A chebyshev semi-iterative approach for accelerating projective and position-based dynamics. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2015, 34 (6): 1-9.
- [106] G. Irving, J. Teran and R. Fedkiw. Invertible finite elements for robust simulation of large deformation. Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics

symposium on Computer animation, Grenoble, France, Eurographics Association, 2004, 131-140.

- [107] G. Irving, J. Teran and R. Fedkiw. Tetrahedral and Hexahedral Invertible Finite Elements. *Graph. Models*, 2006, 68 (2): 66-89.
- [108] I. M. Müller, B. Heidelberger, M. Teschner and M. Gross. Meshless Deformations Based on Shape Matching. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2005, 24 (3): 471-478.
- [109] B. Zhu, M. Lee, E. Quigley and R. Fedkiw. Codimensional non-Newtonian fluids. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 2015, 34 (4): 19.
- [110] N. Chentanez, M. M. #252, Iler and M. Macklin. Real-time simulation of large elasto-plastic deformation with shape matching. *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, Zurich, Switzerland, Eurographics Association, 2016, 159-167.
- [111] A. Colagrossi, B. Bouscasse, M. Antuono and S. Marrone. Particle packing algorithm for SPH schemes. *Computer Physics Communications*, 2012, 183 (8): 1641-1653.
- [112] S. Herminghaus. *Wet granular matter: A truly complex fluid*. World scientific, 2013,
- [113] V. Richefeu, M. S. E. Youssoufi, R. Peyroux and F. Radjaï. A model of capillary cohesion for numerical simulations of 3D polydisperse granular media. *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 2008, 32 (11): 1365-1383.
- [114] H. Bhattacharya, Y. Gao and A. W. Bargteil. A Level-Set Method for Skinning Animated Particle Data. *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, 2015, 21 (3): 315-327.
- [115] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 1987, 21 (4): 163-169.
- [116] Petre P Teodorescu. *Treatise on Classical Elasticity*. Springer, 2013.

# 作者简介

## 基本情况

姓名：何小伟

性别：男

籍贯：浙江绍兴

出生日期：1985年7月29日

## 教育背景

2004/09-2008/07，北京大学信息管理系，学士

2005/09-2008/07，北京大学计算机系，双学位

2008/09-2011/07，北京大学前沿交叉学科研究院，硕士

## 工作经历

2011/08-2013/12，中科院软件所人机交互技术与智能信息处理实验室，研究实习员

2013/12-2017/08，中科院软件所人机交互技术与智能信息处理实验室，助理研究员

2017/09-今，中科院软件所人机交互技术与智能信息处理实验室，副研究员

2015/11-2016/05，美国俄亥俄州立大学 访问学者

2016/07-2016/10，美国 Adobe 总部 访问学者

## 联系方式

Email: xiaowei@iscas.ac.cn

## 攻读学位期间发表的学术论文

- [1] **Xiaowei He**, Huamin Wang, Enhua Wu. Projective Peridynamics for Modeling Versatile Elastoplastic Materials. TVCG, 2017.(CCF-A)
- [2] Sheng Yang\*, **Xiaowei He\***, Huamin Wang, Sheng Li, Guoping Wang, Enhua Wu, Kun Zhou. Enriching SPH Simulation by Approximate Capillary Waves. In Proceedings of SCA. Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, 29-36, 2016.(co-first authors).
- [3] **Xiaowei He**, Huamin Wang, Fengjun Zhang, Hongan Wang, Guoping Wang, Kun Zhou, Enhua Wu , Simulation of Fluid Mixing with Interface Control. In Proceedings of SCA. ACM, New York, NY, USA, 129-135 , 2015. (CCF-B)
- [4] **Xiaowei He**, Huamin Wang, Fengjun Zhang, Hongan Wang, Guoping Wang, and Kun Zhou. Robust Simulation of Sparsely Sampled Thin Features in SPH-Based Free Surface Flows. ACM Trans. Graph. 34(1) : 1-9. (CCF-A)
- [5] Xiaohua Ren, Luan Lyu, **Xiaowei He**, Yanci Zhang, Enhua Wu. Efficient Gradient-Domain Compositing Using an Approximate Curl-free Wavelet Projection. Computer Graphics Forum(Pacific Graphics), 2017. (CCF-B)
- [6] Xiaosheng Li, **Xiaowei He**, Xuehui Liu, Jian Zhang, Baoquan Liu, Enhua Wu, Multiphase Interface Tracking with Fast Semi-Lagrangian Contouring. TVCG, 2015.(CCF-A)
- [7] Xiaosheng Li, **Xiaowei He**, Xuehui Liu, Baoquan Liu, Enhua Wu. Multiphase Surface Tracking with Explicit Contouring. Proceedings of VRST '14, 31-40 (CCF-C)
- [8] **Xiaowei He**, Huamin Wang, Guoping Wang, Hongan Wang, Enhua Wu. A Nonlocal Variational Framework for Robust and Accurate Incompressible SPH. (in submission).

注： CCF            中国计算机学会  
SCA            ACM SIGGRAPH / Eurographics Symposium on Computer Animation  
TVCG          IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics  
VRST          The ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology

## 致 谢

光阴荏苒，转眼间我的博士生涯已经步入尾声。回顾往事，历历在目，用一个简短的公式概括自己就是

$$\text{我} = \int_0^{\text{现在}} \text{选择} dt$$

三年前，我选择了读博。尽管博士毕业并不代表科研的终点，但它确标识了人生的新起点。这里特别需要感谢导师吴恩华研究员。吴老师作为国内图形学领域的灵魂人物，为国内图形学的发展和壮大做出了重要贡献。吴老师严谨的治学作风、一丝不苟的工作态度和饱满的科研热情，给了我莫大的动力和精神鼓舞，为我树立了做人和做学问的榜样。生活上，吴老师又是一位和蔼可亲的长者，学生无论遇到什么困难，给予最多的都是鼓励和支持。

六年前，我选择了中科院软件所。在很多人看来，这并不是一个明智的选择。因为突然间，人们谈论的热点似乎已经不再是真理和理想，而是房价和现实。孩子们长大后的梦想也早已不是什么科学家，而是明星。虽说科研之路注定孤独，但是却离不开同样奋斗在科研道路上的师长和同行的支持和鼓励。这里特别感谢王宏安主任一直以来对我从事科研的包容和理解。感谢张凤军老师、陈辉老师在我迷茫和彷徨时给予的支持和鼓励。感谢王华民老师、周昆老师对我学术上提供的指导和帮助。感谢李洋、彭晓兰在日常事务中提供的帮助。最后也要感谢所有文章的审稿人，你们的审稿意见也是我科研进步的动力。

九年前，我选择了北京大学图形与交互技术实验室。实验室的科研压力让我迅速认识到了自身在知识储备上的欠缺，也特别感谢汪国平老师在我求知过程中悉心的引导和鼓励，在遇到困难时给予的支持和帮助，使我逐渐摆脱人生十字路口的迷茫和彷徨，认清自己的定位，找到人生的方向。同时也要感谢实验室仿真组曾经一起奋斗过或者正在一起奋斗的同仁，感谢与刘宁、唐晨、任毅、朱飞、杨升、陈伟、徐力有、赵静无数次的讨论，是大家一起的努力推动了国内物理仿真方面的进步。

依然是九年前，我遇见了我媳妇郑丹丹。结婚那年，我无房无车，甚至连刚工作几年的储蓄也都花在了母亲癌症的治疗上。然而媳妇却从无怨言，不离不弃地替我支撑起家庭的重担，让我得以安心地从事科研，并顺利完成博士期间的研究工作。佛说：前世

五百次的回眸，才换来今生的擦肩而过。对于这一世，我只想和媳妇说：执子之手，与子偕老。

十一年前，我选择了计算机图形学课程。当年的我完全就是图形学的门外汉，甚至连基本的编程都并不熟练。然而李胜老师并没有因为我的基础薄弱而放弃，而是从最基础的编程开始慢慢引导我步入图形学的大门。而正是这一次不经意的选择，彻底改变了我接下来的人生足迹。

十三年前，我选择了北京大学信息管理系。尽管目前有一种普遍的声音认为寒门难再出贵子，然而北京大学信息管理系以其包容的姿态接纳了我这个大学之前甚至都没怎么摸过电脑的孩子。大学的四年不仅让我快速融入到新环境中，也让我掌握了基本的学习方法和工具，让我终生受益。特别感谢信息管理系陈文广老师、赵文老师、王军老师、韩圣龙老师对我专业知识和生活上的指导和帮助，也要感谢杨扬、孙鹏飞、王培志在困难中提供的帮助。

二十三年前，我选择了奥数。从此无数个日日夜夜，陈伟红老师像对待自己孩子一样悉心教导我，培养我独立思考的能力，让我懂得任何微小成就达成的前提是专注。也正是从那一年起，让我变的更加有自信，让我开始懂得如果用理性的思维去看待、探索这个世界。也特别感谢杨仲安老师、梁新潮老师对我数学上的悉心辅导。

三十二年前，我选择了地球，从此注定这世间会有两个人像天使一样无时无刻的守护着我。忘不了，那年因为惊厥，我第一次看见父亲流泪；也忘不了，那年因为高中改革，母亲为了凑一万元的赞助费四处奔波的艰辛和无奈。然而转瞬间，故乡只剩冬，再无春夏秋，父母所熟悉的我只剩下手机听筒中传出的数字信号。此刻的父母，早已没有了当年的风华正茂。有的是，父母打电话时一遍又一遍的关心和嘱托；有的是，母亲住院期间见到我时的欣喜和离开时不舍的眼泪。有人说，陪伴就是最好的孝道。回想过去这么多年，自己做的最少的恰恰是对父母的陪伴，内心的亏欠远非一句感谢所能弥补。

生命还在继续，对未来的积分怎么算我并不清楚。我清楚的是，滴水之恩，当涌泉相报。最后，借用高晓松的一句话自勉：“生活不止眼前的苟且，还有诗和远方的田野”。